TD4 - Séries Entières

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{3^n+n} z^{4n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathrm{ch}(na) z^n$, $a \in \mathbb{R}$

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f^{(n)}(0)$ puis déterminer la série entière $\sum a_n x^n$ engendrée par f.
3. La fonction f est-elle développable en série entière à l'origine?

Exercice 3

Calculer le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes (en précisant le domaine de validité du développement).

1. $f : x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$
2. $f : x \mapsto \arcsin(x)$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^4}{x^4+x^2-2}$

Exercice 4

Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle suivante qui sont développables en série entière en 0 :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$$

Exercices Supplémentaires

Exercice 5

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(n\theta) z^n$, $\theta \in \mathbb{R}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n-1)^n}{(n+1)!} z^n$

Exercice 6

Calculer le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes (en précisant le domaine de validité du développement).

1. $f : x \mapsto \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{e^x}$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = (1-x)^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une équation différentielle donc f est solution.
2. Déterminer toutes les solutions développables en série entière en 0 de cette équation différentielle.
3. La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ? Si oui, quel est son développement ?