E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
2^e **Année Classe Préparatoire**

T.D. MATHEMATIQUES CPI. II

T.D. n° 3 **(Séries Numériques)**
le 25 octobre 2019

Ex.1

Etudier la convergence des séries de terme général u_n :

$$u_n = \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}, \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } \quad \alpha \in \mathbb{R}; \qquad u_n = \frac{(-2)^n}{1+3^n}; \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+\ln(n)} \ (n \geq 1);$$

$$u_n = \frac{\sin(n)}{1+\cos(n)+e^n}; \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)} \quad (n \geq 1);$$

$$u_n = \arctan(n\alpha)\sin(\frac{1}{n^3}), \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } \quad \alpha \in \mathbb{R}; \qquad u_n = \frac{1+(-1)^n n}{n^2} \quad \text{pour } n \geq 1;$$

Ex.2

Soit la série de Riemann suivante : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et different de 1 :

1) Déterminer un encadrement de : $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}$

En faisant varier n et en ajoutant les inégalités adéquates, donner un encadrement de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

2) Dans le cas $\alpha < 1$, en déduire un equivalent de S_n quand $n \to \infty$.

3) Dans le cas $\alpha > 1$, trouver un encadrement de la somme S de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et donner un equivalent du reste : $R_n = S - S_n$.

Ex.3

Etudier la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}*} u_n$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{1+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ex.4

Déterminer un entier n tel que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots \ \frac{1}{\sqrt{n}} > \ 10$$

Ex.5

1) Déterminer la nature de la série suivante : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$

2) Montrer que quand $n \to \infty$ on a :

$$[\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))) \sim \frac{1}{n\ln(n)}$$

En déduire un equivalent de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$

Ex.6

Soit $u_n = \ln(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}), \quad$ pour $n \geq 1$.

1) En utilisant un développement limité à l'ordre 3, étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Remarquer qu' au $\mathcal{V}(+\infty)$ $u_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Quelles reflexions vous inspire-t-il ?

2) Le même raisonnement s'applique-t-il aux séries suivantes de terme général ?

$$v_n = \exp(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}) - 1; \qquad w_n = \sin(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}});$$
$$x_n = \exp(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}) - \frac{2n+1}{2n}; \qquad y_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$$

Ex.7

Etudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}; \;\; v_n = \frac{\cos(n)}{n}; \;\;\; w_n = \frac{\cos^2(n)}{n}; \;\;\; x_n = \cos(na)\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}, \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

Ex.8

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}; \quad \text{et} \quad u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n);$$

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

2) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge vers un réel strictement positif qu'on notera L.

3) Calculer L en formant : $\frac{a_n^2}{a_{2n}}$ et en utilisant la formule de Wallis qui est :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

4) En déduire la formule de Stirling au voisinage de $\mathcal{V}(\infty)$:

$$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$$