
SÉRIES - TD2-B
SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, où pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n : E \rightarrow \mathbf{R}$

1. $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ sur $E = [0, 1]$.
2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $E = \mathbf{R}$ puis sur $E =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ ($\forall a > 0$).
3. $f_n(x) = \frac{x^n-1}{x^n+1}$ sur $E = \mathbf{R}_+$.
4. $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$ sur $E = [0; 1]$ puis sur $E = [0, a]$ où $a \in]0; 1[$
5. $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$ sur $E = [0, 1]$, $n \neq 0$
6. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$ sur $E = \mathbf{R}_+$ puis sur $E = [a; 1]$ où $a \in]0; 1[$
7. $f_n(x) = e^{-nx^2} \sin(nx^2)$ sur $E = [0, 1]$ puis sur $E = [a, 1]$ où $a \in]0, 1[$
8. $f_n(x) = \sin^n(x)$ sur $E = [0, \frac{\pi}{2}]$ puis sur $E = [0; a]$ où $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$
9. $f_n(x) = \sin\left(\sqrt{x+4\pi^2n^2}\right) - \frac{x}{4\pi n}$ sur $E = \mathbf{R}_+$, $n \neq 0$
10. $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ sur $E = \mathbf{R}_+$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$

Exercice 2. Soit k un entier positif ou nul et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \frac{x^k}{x^2+n}$ (pour $k = 0$ on admet que $f_0(x) = \frac{1}{x^2+n}$);

1. Pour quelles valeurs de k cette suite converge-t-elle uniformément sur \mathbf{R} ?
2. Pour quelles valeurs de k cette suite converge-t-elle uniformément sur toute partie bornée de \mathbf{R} ?

Exercice 3.

Un peu de théorie

1. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite des fonctions \mathbf{R} dans \mathbf{R} , définie par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ (1-n^2)x + 2n - \frac{1}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ \frac{1}{n} & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, +\infty[\end{cases}$$

Montrer que

-
- (a) (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
 - (b) $(f_n \circ f_n)$ ne converge pas simplement vers $f \circ f$.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
On suppose que f_n converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f .
Montrer que la suite $(f_n \circ f_n)$ converge simplement vers $f \circ f$.
3. Soit à présent la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(f_n(x)) = x^2 + \frac{1}{n}$.
Montrer que
- (a) la suite (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f que l'on déterminera.
 - (b) la suite $(f_n \circ f_n)$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} vers $f \circ f$.

Exercice 4.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[-1, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

- 1. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.
- 2. Etudier la convergence de $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[-1, 1]$.
- 3. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[-1, 1]$ par

$$g_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{2n^2}$$

Montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$.

Exercice 5.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 2. Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

- 3. Soit $a \in]0, 1[$. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, 1]$.

Exercice 6.

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x} dx \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^2)^n}$$

Exercice 7.

- 1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.

-
2. En déduire la nature de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} dx$$

Exercice 8.

1. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n \geq 0}$ définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}$$

converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que l'on a convergence uniforme sur tout intervalle $[\alpha, 1]$ avec $\alpha \in]0, 1[$. A-t-on convergence uniforme sur $[0, 1]$?
3. Montrer que $|f_n(x) - f(x)|$ est bornée sur $[0, 1]$.
4. Déduire des questions précédentes la nature de la suite

$$u_n = \int_0^1 \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1} dx$$

Exercice 9.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.
Montrer que $(f_n \circ \varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \circ \varphi$ sur \mathbb{R} .
2. Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur \mathbb{R} . Montrer que $(\psi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\psi \circ f$ sur \mathbb{R} .
3. Que peut-on dire si ψ n'est pas uniformément continue? Prendre $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ et $\psi(x) = x^2$