

TD2 - SUITES DE FONCTIONS

PARTIE I - CONVERGENCES

Exercice 1

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , et convergeant simplement sur I vers une fonction f . Que peut-on dire de f si chaque fonction f_n est :

1. monotone sur I ?
2. paire (ou impaire) sur $I = [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$.
3. convexe (ou concave) sur I ?

On rappelle qu'une fonction est dite convexe sur un intervalle I si elle est vérifiée $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Exercice 2

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) où pour tout n : $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$.

1. $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$, $E = [0, 1]$.
2. $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$, $E = [0, 1]$, $n \neq 0$.
3. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$, $E = \mathbb{R}_+$.
4. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $E = \mathbb{R}_+$, puis $E = [a, +\infty[$ avec $a > 0$.
5. $f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$, $E = \mathbb{R}_+$.

Exercice 3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) la suite de fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \frac{x^p}{x^2 + n}$.

1. Pour quelles valeurs de p cette suite converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R} ?
2. Pour quelles valeurs de p cette suite converge-t-elle uniformément sur tout intervalle borné de \mathbb{R} ?

Exercice 4

On considère la suite des fonctions (f_n) définies sur $[-1, 1]$ par:

$$f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx^2} + \sqrt{1-x^2}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[\alpha, 1]$ avec $\alpha \in]0, 1[$.
3. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Exercice 5

On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto 1$ sur tout compact de \mathbb{R}
2. A-t-on convergence uniforme sur \mathbb{R} ?

Exercice 6

On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0, \pi]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x(1+nx)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier les convergences simple et uniforme de (f_n) sur $[0, \pi]$.
2. Soit $a \in]0, \pi[$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur le segment $[a, \pi]$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 7

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) où pour tout n : $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$.

1. $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n], \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$, $E = \mathbb{R}_+$.
2. $f_n(x) = x^n \ln(x)$ prolongée avec $f_n(0) = 0$, $E = [0, 1]$.
3. $f_n(x) = e^{-nx^2} \sin(nx^2)$, $E = [0, 1]$ puis $E = [a, 1]$ avec $a \in]0, 1[$.
4. $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, $E = \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit $a \in [0, 1[$. Considérons la suite des fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto 1 + z + \dots + z^n \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément vers $f : z \mapsto (1-z)^{-1}$ dans chaque disque $D_a = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.
2. Montrer que (f_n) converge simplement, mais non uniformément, dans le disque unité ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Exercice 9

On considère la suite (f_n) définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Calculer

$$\int_0^1 f_n(x) \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x) \, dx.$$
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0, 1]$?
4. Soit $a \in]0, 1[$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[a, 1]$.

Exercice 10

Calculer

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x} \, dx \qquad 2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^2)^n} \, dx.$$

Exercice 11

On considère la suite (f_n) définie sur $[-1, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.
2. Étudier la convergence de la suite (f'_n) sur $[-1, 1]$.
3. Soit (g_n) la suite de fonctions définie sur $[-1, 1]$ par

$$g_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{2n^2}.$$

Montrer que la suite (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$.

Exercice 12

On considère la suite (f_n) définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une limite f à déterminer.
2. En déduire la nature de la suite

$$u_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} \, dx.$$

Exercice 13

On considère la suite (f_n) définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une limite f à déterminer.
2. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, 1]$ avec $a \in]0, 1[$. A-t-on convergence uniforme sur $[0, 1]$?
3. Montrer que $|f_n(x) - f(x)|$ est bornée sur $[0, 1]$.
4. Dédurre des questions précédentes la nature de la suite

$$u_n = \int_0^1 \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1} dx.$$

Exercice 14

On considère la suite (f_n) et la fonction ψ définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad \psi(x) = x^2.$$

Montrer que (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers une limite f , mais que $\psi \circ f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} vers $\psi \circ f$.

Généralisation :

Soit (f_n) une suite de fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f .

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que $(f_n \circ \phi)$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers $f \circ \phi$.
2. Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur \mathbb{R} . Montrer que $(\psi \circ f_n)$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers $\psi \circ f$.
3. À l'aide de l'exemple ci-dessus, que pouvez-vous dire si ψ n'est pas uniformément continue ?