E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
2^e **Année Classe Préparatoire**

T.D. MATHEMATIQUES CPI. II

T.D. $n°$ 2 **(Séries Numériques)**
le 10 octobre 2019

Ex.1

1) Soient $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant :

$$u_n = v_n - v_{n-1}, \quad n \geq 1$$

Comparer la nature de la série : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}*} u_n$ et celle de la suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Montrer que les séries de terme général suivant sont convergentes, en calculant leur somme :

— a)

$$u_n = \frac{1}{1+2+...n}$$

— b)

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

— c)

$$w_n = \ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]$$

Ex.2

Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs convergentes .
Etudier les séries de termes généraux :

$$w_n = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad t_n = \frac{1}{n}\sqrt{u_n}$$

Ex.3

1) Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs.

— a) Montrer que la série de terme général :

$$v_n = \frac{u_n}{1+n^2 u_n}$$

converge.

— b) Montrer que la série de terme général :

$$w_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

est de même nature que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

2) On se donne trois séries à termes positifs et convergentes : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$.

Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n \qquad \text{où} \quad z_n = \sqrt{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n}$$

(Indication : On peut développer $(u_n + v_n + w_n)^2$ et trouver une majoration de z_n)

Ex.4

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs.
On pose :

$$u_n = \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_n}$$

Discuter suivant la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la convergence de la série : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Ex.5

Nature des séries de terme général u_n :

$$u_n = \frac{n^2}{n^2+1}; \qquad u_n = \sqrt{n^2+n} - n; \qquad u_n = \arcsin\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right); \qquad u_n = \frac{1}{\ln(n+1)};$$

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}; \qquad u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}; \qquad u_n = \sin^3\left(\frac{1}{n}\right); \qquad u_n = 1 - \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right);$$

$$u_n = \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n} \ (n \geq 2); \qquad u_n = \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}; \qquad u_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^n};$$

$$u_n = \frac{n^3}{n!}; \qquad u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \qquad u_n = \frac{na^n}{(n+1)!} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}^+;$$

$$u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}^{+*};$$

$$u_n = \frac{n^2}{2^n+n}; \qquad u_n = \ln\left[\frac{1+\tan(\frac{1}{n})}{1-\tan(\frac{1}{n})}\right]$$

Ex.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ u_{n+1} = \frac{\exp(-u_n)}{n+1}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.