TD1 - Séries Numériques

Partie I - Séries numériques à termes positifs

Exercice 1
Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \cos\frac{1}{n^2}$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n}{n+1}$
3. $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
4. $\sum_{n\geq 1} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exercice 2
Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n^2}$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$
4. $\sum_{n\geq 1} \left(ne^{\frac{1}{n}}-n\right)$
5. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln(n))^n}$
6. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1+e^{-n}\right)$

Exercice 3
Soit (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Exercice 4
Etudier la nature et, le cas échéant, calculer la somme des séries de terme général :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$
2. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
3. $u_n = \frac{2n-1}{n\left(n^2-4\right)}$
4. $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$

Exercice 5 (Séries de Bertrand)

1. Montrer que
$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$$
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$.
3. Montrer que
$$\forall n \geq 3, \quad \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k} \leq \frac{1}{\ln 2}$$
4. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$.

Exercices Supplémentaires

Exercice 6
Etudier la nature de la série de terme général

1. $u_n = \dfrac{n+1}{n^3-7}$
2. $u_n = \dfrac{n+1}{n^2-7}$
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n-7}$
4. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$
6. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$
7. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
8. $u_n = \dfrac{n^n}{2^n}$
9. $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$
10. $u_n = \dfrac{1}{n!}$
11. $u_n = \dfrac{n^{10000}}{n!}$
12. $u_n = \dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$
13. $u_n = \left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$
14. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$
15. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exercice 7
Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+bn+1}\right)^n, \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2, a\geq b.$$

Partie 2 - Séries numériques à termes quelconques

Exercice 8

Considérons les séries
$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$
Montrer que les termes généraux de ces séries sont équivalents mais que les séries n'ont pas la même nature.

Exercice 9

Étudier les séries:

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Exercice 10

Étudier la convergence de la série numérique de terme général

1. $u_n=(-1)^n\dfrac{n^3}{n!}$
2. $u_n=\dfrac{a^n}{n!}, \quad a\in\mathbb{C}$
3. $u_n=na^{n-1}, \quad a\in\mathbb{C}$
4. $u_n=\sin\left(\dfrac{n^2+1}{n}\pi\right)$
3. $u_n=(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
4. $u_n=n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 11

On considère la série :
$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

1. Montrer que la série est convergente.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
3. Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{n+2}$$
4. En déduire que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$$
5. Donner une valeur approchée de $\ln 2$ à la précision 10^{-3}.

Exercice 12

Montrer la convergence et calculer les sommes des séries de terme général

1. $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}$
2. $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$