

TD0 - RAPPELS

Limites et équivalents

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^t - 1}{1 - t + \ln(1 + t)}$.
2. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t - 1}$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^x}}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - x^x} + \frac{1}{x \ln(x)}$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$.

Exercice 2

Déterminer des équivalents simples de

1. $x + \sin(x)$ en 0 puis en $+\infty$.
2. $x - \sin(x)$ en 0 puis en $+\infty$.
3. $\ln(\tan(x))$ en 0^+ puis en $\frac{\pi}{4}$.
4. $\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}$ en 0.
5. $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^3 + 2x^2}$ en 0^+ puis en $+\infty$.

Exercice 3

Déterminer des équivalents en 0 de

1. $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(1 + x^2)}{x \arctan(x)}$.
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1 - \operatorname{ch}(x)}{1 - \cos(x)}$.
3. $f_3 : x \mapsto \frac{e^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1 + x)}$.
4. $f_4 : x \mapsto \frac{\sin^2(x) - x \ln(1 + x)}{e^x + \cos(x) - \sin(x) - 2}$.

Exercice 4

Déterminer des équivalents en $+\infty$ de :

1. $u_n = \frac{e^{1/n} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}$.
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. $u_n = \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)\right)}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$.
4. $u_n = e^{1/n} - e^{1/(n+1)}$.
5. $u_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}{\sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)}$.
6. $u_n = e\sqrt{n^2 - n + 1} - n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 5

Pour tout $n \geq 2$ on note $u_n = \left(\frac{\ln(1 + n)}{\ln(n)}\right)^{n \ln(n)}$.

1. Déterminer un équivalent de $\ln(u_n)$ en $+\infty$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.