**2023/2024**
Semestre 1 – PréIng 2
Lundi 22 Janvier

# Séries

## Examen

◁ Consignes ▷

Durée : 120 mn

- ▶ Inscrivez votre nom, prénom, numéro de groupe et nombre de pages sur votre copie.
- ▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- ▶ L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- ▶ Le barème est à titre indicatif.
- ▶ La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

### Exercice 1 (8pts)

1. (a) Énoncé le Théorème Spécial des Séries Alternées.
   (b) Déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.
2. (a) Donner la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
   (b) Étudier les convergences simples et uniforme de la suite de fonctions $f_n : x \to \dfrac{x^n-1}{x^n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. (a) Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions.
   (b) Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \to \dfrac{1}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

### Exercice 2 (4pts)

On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(n+2)}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence $R$ de cette série entière.
2. On fixe $x=1$, justifier que la série numérique $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+2)}$ converge.
3. Toujours pour $x=1$ fixé, calculer la somme de la série.

## Exercice 3 (10pts)

On considère la fonction $S : x \to \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. L'objectif de cet exercice est de montrer que

$$\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Pour ce faire, on va étudier la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ avec $f_n : x \to e^{-(n+1)x}\sin(x)$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour $n \geq 1$ et $x > 0$ fixés calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ et en déduire que $S$ est la limite simple de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soient $A$ et $B$ deux réels fixés tels que $0 < A < B$. Justifier que $S$ est continue sur $[A, B]$ et que
$$\int_A^B S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A^B f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques réelles. Pour tout $n \geq 1$ on définit la fonction
$$F_n : x \to (\alpha_n \cos(x) + \beta_n \sin(x))\, e^{-(n+1)x}.$$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$F_n'(x) = \Big(\big(\beta_n - (n+1)\alpha_n\big)\cos(x) - \big(\alpha_n + (n+1)\beta_n\big)\sin(x)\Big)e^{-(n+1)x}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\alpha_n$ et $\beta_n$ tels que $F_n' = f_n$.

6. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_A^B f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

7. Justifier que $\displaystyle\lim_{A\to 0}\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(0)$ et $\displaystyle\lim_{B\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(B) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{B\to+\infty} F_n(B)$

8. Conclure.