Séries

Rattrapage Surveillé

◁ Consignes ▷

Durée : 120 mn

- ▶ Inscrivez votre nom, prénom, numéro de groupe et nombre de pages sur votre copie.
- ▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- ▶ L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- ▶ Le barème est à titre indicatif.
- ▶ La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 (4pts)

On considère la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par $f_n : \ ]0,1] \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto -x^n \ln x$$

a. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $]0,1]$.

b. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite d'applications $(f'_n)_{n\geq 1}$ sur $]0,1]$.

Exercice 2 (10pts)

Soit α un nombre réel. Pour tout entier naturel n non nul, on définit

$$f_n : x \mapsto \frac{x^3}{1+n^\alpha x^4}$$

1. Montrer que la série d'applications $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha > 1$.

   Pour tout $\alpha > 1$, on notera S_α la somme de cette série .

2. (a) Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 1$ tel que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha > \alpha_0$.

   (b) Montrer que si $\alpha > \alpha_0$ alors S_α est continue sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Étudier la convergence normale de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $D_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

   (b) Déterminer tous les α pour lesquels S_α est continue sur $\mathbb{R}^*$.

4. Dans cette question, on suppose que $\alpha > 0$. Pour tout entier naturel n non nul, on note $g_n = (-1)^n f_n$.

   (a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (5pts)

On considère la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{2^n}$$

1. Montrer que la série d'applications $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer explicitement $S(x)$ pour tout réel x.
   Indication: On pourra passer par les nombres complexes.

Exercice 4 (4pts)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) x^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)} z^n$