Rattrapage : 2023/2024

• Exercice 1 :

a) Soit $x \in]0,1]$.

Si $x = 1$:

$f_n(x) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

Si $x \neq 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} -x^n \ln(x) = 0$$

(car $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ car $0 < x < 1$)

d'où $f_n \xrightarrow{C.S} f$ sur $]0,1]$ avec $f(x) = 0$

b) Soit $x \in]0,1]$.

On pose

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = -x^n \ln(x)$$

$$g_n'(x) = -\left(n x^{n-1} \ln(x) + x^{n-1}\right) = n x^{n-1}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{n}\right)$$

d'où

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		1
g_n'		$+$	0	$-$	
g_n		$\nearrow$	$g_n(e^{-\frac{1}{n}})$	$\searrow$	0

On a $\sup\limits_{x\in]0,1]} (g_n(x)) = g_n(e^{-\frac{1}{n}})$

d'où,

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(e^{-\frac{1}{n}}) = \lim_{n\to+\infty} -e^{-1} \ln(e^{-\frac{1}{n}}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-1}}{n} = 0$$

d'où $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur $]0,1]$

b) Soit $x \in]0,1]$

On pose :

$g_n(x) = f_n'(x)$
$= -x^{n-1}(n\ln(x)+1)$

Si $x=1$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} -1 = -1$

Si $x \neq 1$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} -x^{n-1}(n\ln(x)+1)$
$= \lim\limits_{n\to+\infty} n x^{n-1}(\ln(\frac{1}{x}) - 1)$
$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{(n-1)\ln(\frac{1}{x})}}(\ln(\frac{1}{x})-1)$

$= 0$

d'où $g_n \xrightarrow{CS} g$ sur $]0,1]$ avec

$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } x\in]0,1[\end{cases}$

On a g_n est continue en 1 et g n'est pas continue en 1

d'où

$g_n \not\xrightarrow{CU} g$ sur $]0,1]$

• Exercice 2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

1) Si $\alpha < 0$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x^3 \neq 0$

d'où $\sum f_n$ diverge

Si $\alpha = 0$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{x^3}{1+x^4} \neq 0$

d'où $\sum f_n$ diverge

Si $\alpha > 0$:

$$f_n(x) \sim \frac{x^3}{n^\alpha x^4} = \frac{1}{x n^\alpha}$$

Si ~~[illegible]~~ $\alpha > 1$

Σf_n converge, simplement sur $\mathbb{R}$ (car $\Sigma \frac{1}{x n^\alpha}$ converge)

Si $\alpha \in]0,1]$:

Σf_n diverge (car $\Sigma \frac{1}{x n^\alpha}$ diverge)

donc

Σf_n converge simplement sur $\mathbb{R} \iff \alpha > 1$

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$

On pose $g_n(x) = |f_n(x)| = \frac{|x|^3}{1+n^\alpha x^4}$

$$g_n'(x) = (|f_n(x)|)'$$
$$= \left(\frac{|x|^3}{1+n^\alpha x^4}\right)'$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$: $g_n(-x) = g_n(x)$

d'où g_n est paire

alors on restreint l'intervalle d'étude à ~~sur~~ $\mathbb{R}^+$

d'où :

$$g_n'(x) = \frac{3x^2(1+n^\alpha x^4) - 4 n^\alpha x^6}{(1+n^\alpha x^4)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - n^\alpha x^6}{(1+n^\alpha x^4)^2}$$

$$= x^2 \left(\frac{3 - n^\alpha x^4}{(1+n^\alpha x^4)^2} \right)$$

x	0		$\sqrt[4]{\frac{3}{n^\alpha}}$		$+\infty$
g_n'		$+$	0	$-$	
g_n		$\nearrow$	$g_n\left(\sqrt[4]{\frac{3}{n^\alpha}}\right)$	$\searrow$	0

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (f_n(x)) = f_n\left(\sqrt[4]{\frac{3}{n^{\alpha}}}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{n^{\alpha}}\right)^{3/4}}{1+3}$$

$$= \frac{3^{3/4}}{4} \cdot \frac{1}{n^{3\alpha/4}}$$

On a

$\sum \frac{3^{3/4}}{4} \cdot \frac{1}{n^{3\alpha/4}}$ CV $\Leftrightarrow \frac{3\alpha}{4} > 1$

$\Leftrightarrow \alpha > \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \alpha > \alpha_0$ (avec $\alpha_0 = \frac{4}{3}$)

donc

$\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha > \alpha_0$ (avec $\alpha_0 = \frac{4}{3}$)

b) Soit $\alpha > \alpha_0$ et $x \in \mathbb{R}$:

On a $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}$

et f_n est continue sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R} : 1 + n^{\alpha} x^4 \neq 0$

donc d'après le théorème d'interversion somme - intégrale :

S_α est continue sur $\mathbb{R}$

3) a) Soit $\alpha > 1$ et $x \in D_a$ (et $a > 0$)

On a

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^3}{1+n^{\alpha}x^4} \leq \frac{|x|^3}{n^{\alpha}|x|^4} = \frac{1}{|x|\, n^{\alpha}} \leq \frac{1}{|a|\, n^{\alpha}}$$

(car $x \in D_a \Leftrightarrow |x| \geq a$)

On a $\alpha > 1$:

d'où $\sum \frac{1}{|a| n^{\alpha}}$ CV (Riemann $\alpha > 1$)

donc $\sum f_n$ CVN sur D_a

b) Soit $a > 0$ On a $\sum f_n$ CVN sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ (avec $\alpha > 1$)

d'où $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}^*$ localement (avec $\alpha > 1$)

et on a f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $1 + n^\alpha x^4 \neq 0$
d'où d'après le théorème d'interversion somme-intégrale :
S_α est continue sur $\mathbb{R}^*$ (avec $\alpha > 1$)

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $g_n(x) = (-1)^n f_n(x)$ et $\alpha > 0$
On pose $a_n = \frac{|x|^3}{1+n^\alpha x^4}$

On a $a_{n+1} - a_n = |x|^3 \left(\frac{1}{1+(n+1)^\alpha x^4} - \frac{1}{1+n^\alpha x^4} \right)$

$$= \frac{|x|^3}{(1+(n+1)^\alpha x^4)(1+n^\alpha x^4)} \left(x^4 (n^\alpha - (n+1)^\alpha) \right)$$

$$= \frac{|x|^7}{(1+(n+1)^\alpha x^4)(1+n^\alpha x^4)} (n^\alpha - (n+1)^\alpha)$$

or $a_{n+1} - a_n < 0$ (car $n^\alpha - (n+1)^\alpha < 0$)
d'où a_n est décroissante
et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ (car si $x = 0$ $a_n = 0$ et si $x \neq 0$: $a_n \sim \frac{1}{n^\alpha |x|}$
d'où $\lim a_n = 0$ car $\alpha > 0$)
alors d'après C.S.S.A
$\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^n \frac{|x|^3}{1+n^\alpha x^4}$ CVS

d'où $\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^3}{1+n^\alpha x^4}$ CVS

b) On a d'après C.S.SA :
$|R_n| \leq a_{n+1} \Rightarrow |R_n| \leq \frac{|x|^3}{1+(n+1)^\alpha x^4} \leq \frac{|x|^3}{(n+1)^\alpha x^4} = \frac{1}{|x|(n+1)^\alpha}$

Exercice 3

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a

$|f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{2^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ CV (série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$)

donc $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}$

On a f_n est de classe C^1 (car $x \longrightarrow \sin(nx)$ est de classe C^1)

et pour $x_0 = 0$

$\sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$ CV (car $f_n(x_0) = 0$)

et on pose $g_n(x) = f_n'(x)$ d'où

$|g_n(x)| = |f_n'(x)|$

$= \frac{n}{2^n} |\cos(nx)|$

$\leq \frac{n}{2^n}$

On a $\lim_{n \to +\infty} n^2 \cdot \frac{n}{2^n} = 0$ (Par croissance comparée)

d'où d'après la règle de n^α

$\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n}$ CV

donc $\sum_{n \geq 0} f_n'$ CVN sur $\mathbb{R}$

d'où $\sum_{n \geq 0} f_n'$ CVU sur $\mathbb{R}$

alors d'après le théorème d'interversion somme - Dérivée :

S est C^1 sur $\mathbb{R}$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$S_n = \sum_{k \geq 0} f_k(x)$

$= \sum_{k=0} \frac{\sin(kx)}{2^k}$

$= \sum_{k=0}^{N} \frac{Im(e^{ikx})}{2^k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\left(\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^k \right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{ix}}{2}} \right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2^n} \frac{2^{n+1} - e^{ix(n+1)}}{2-e^{ix}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^n} \mathrm{Im}\left(\frac{2^{n+1} - \cos(x(n+1)) - i\sin(x(n+1))}{2-\cos(x) - i\sin(x)} \right)$$

$$= \frac{1}{2^n} \mathrm{Im}\left(\frac{(2-\cos(x)+i\sin(x))(2^{n+1} - \cos(x(n+1)) - i\sin(x(n+1)))}{(2-\cos(x))^2 + \sin^2(x)} \right)$$

$$= \frac{1}{2^n(5-4\cos(x))} \mathrm{Im}\Big(2^{n+2} - 2\cos(x(n+1)) - 2i\sin(x(n+1)) - 2^{n+1}\cos(x)$$
$$+ \cos(x)\cos(x(n+1)) + i\cos(x)\sin(x(n+1))$$
$$+ i\sin(x)2^{n+1} - i\sin(x)\cos(x(n+1)) + \sin(x)\sin(x(n+1)) \Big)$$

$$= \frac{1}{2^n(5-4\cos(x))} \Big(-2\sin(x(n+1)) + \cos(x)\sin(x(n+1)) + 2^{n+1}\sin(x)$$
$$- \sin(x)\cos(x(n+1)) \Big)$$

Soit $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \dfrac{2\sin(x)}{5-4\cos(x)}$

Exercice 4 :

1) Soit $a_n = \dfrac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2^2\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{8} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{(1+\frac{1}{2n})(1+\frac{2}{n})}}$

$= \dfrac{1}{8}$

d'où $R = 8$

2) Soit $a_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \sim 1$

d'où $R = 1$

3) Soit $a_n = \dfrac{(-1)^n}{1\times 3\times \dots \times(2n-1)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1\times 3 \dots \times(2n-1)}{1\times 3 \dots \times \cancel{(2n+1)}\times(2n+2)}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n(2n+1)}$

$= 0$

d'où $R = +\infty$