Exercice 1 :

1) a) Théorème spécial des séries alternées :

Soit série numérique de terme général $a_n(-1)^n$

$$\begin{cases} a_n \text{ positif} \\ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ a_n \text{ est décroissant} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum a_n(-1)^n \text{ CV} \\ |R_n| \leq a_{n+1} \\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \end{cases}$$

b) $(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$$= (-1)^n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$= (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

On a $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ CV (Riemann alternée avec $\alpha = \frac{1}{2} > 0$)

et $\sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ CV car $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ CV (Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 0$)

donc $\sum (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ CV

2) a) Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions

$f_n \xrightarrow{C.U} f$ sur $I \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in I$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

b) Soit $f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$ sur $\mathbb{R}_+$

Si $x = 1$: $f_n(x) = 0$

Si $x \in [0, 1[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = -1$

Si $x > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = 1$

d'où $f_n \xrightarrow{C.S} f$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ -1 & \text{si } x \in [0, 1[\end{cases}$

Or a f n'est pas continue en 1 et f_n est continue en 1

donc f_n n'est pas convergente uniformément sur $\mathbb{R}^+$

3) a) $\sum f_n$ CVN

$\Longleftrightarrow \sum \|f_n\|_\infty$ CV

b) On a :

$$|f_n| \leq \frac{1}{n^2}$$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (Riemann $\alpha = 2 > 1$)

donc $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}$ d'où $\sum f_n$ CVA et CVU et CVS

- Exercice 2 :

1) Soit $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$ une série entière

On pose $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2/n}{(1+1/n)(1+3/n)}$$

$$= 1$$

d'où $R = \frac{1}{1} = 1$

2) Soit $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+2)n}$

On a $\frac{1}{n(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV (Riemann $\alpha = 2 > 1$)

donc $\sum \frac{1}{n(n+2)}$ CV

3) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

d'où $S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$

- Exercice 3 :

1)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-(n+1)x} \sin(x) = 0$ (croissance comparée)

donc d'après la règle de n^α :

$\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$

2) Soit $n \geq 1$ et $x > 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sin(x) \sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^{k+1}$$

$$= \sin(x)\, e^{-x} \cdot \frac{1-(e^{-x})^{n+1}}{1-e^{-x}}$$

$$= \frac{\sin(x)\,(1-e^{-x(n+1)})}{e^x - 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \frac{\sin(x)}{e^x-1} = S$$

Soit $0 < A < B$

3) On a $x \longrightarrow \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et

donc sur $[A, B]$

et $x \longrightarrow e^x - 1$ est " " " "

" " — —

et $\forall x \in [A, B]$: $e^x - 1 \neq 0$ (car $x \neq 0$)

donc S est continue sur $[A, B]$ comme quotient

de deux fonctions continues sur $[A, B]$

et Soit $x \in [A, B]$

on a

$$|f_n(x)| \leq e^{-(n+1)x} |\sin(x)|$$

$$\leq e^{-(n+1)A}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-(n+1)A} = 0$

donc d'après la règle de n^α $\sum e^{-(n+1)A}$ CV

d'où $\sum f_n$ CVN sur $[A, B]$

donc $\sum f_n$ CVU sur $[A, B]$

et on a f_n est continue sur $[A, B]$

d'où d'après le théorème d'intervertion somme - intégrale

$$\int_A^B S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A^B f_n(x)\,dx$$

4) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$F_n'(x) = \left(-\alpha_n \sin(x) + \beta_n \cos(x)\right) e^{-(n+1)x} - \left(\alpha_n \cos(x) + \beta_n \sin(x)\right)(n+1) e^{-(n+1)x}$$

$$= e^{-(n+1)x}\left(\left(\beta_n - (n+1)\alpha_n\right)\cos(x) - \left(\alpha_n + \beta_n(n+1)\right)\sin(x)\right)$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$F_n'(x) = f_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\beta_n - (n+1)\alpha_n\right)\cos(x) - \left(\alpha_n + \beta_n(n+1)\right)\sin(x) = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_n - (n+1)\alpha_n = 0 \\ \alpha_n + \beta_n(n+1) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_n - (n+1)\alpha_n = 0 \\ (n+1)\alpha_n + \beta_n(n+1)^2 = -(n+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_n\left(1 + (n+1)^2\right) = -(n+1) \\ \alpha_n = -1 - \beta_n(n+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_n = -\dfrac{n+1}{1+(n+1)^2} \\ \alpha_n = -1 + \dfrac{(n+1)^2}{1+(n+1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = -\dfrac{1}{1+(n+1)^2} \\ \beta_n = -\dfrac{n+1}{1+(n+1)^2} \end{cases}$$

6) $\int_A^B f_n(x)\,dx$

$$= \int_A^B F_n'(x)\,dx$$

$$= \left[F_n(x)\right]_A^B$$

$$= F_n(B) - F_n(A)$$

7) On a $\sum f_n$ CVU sur $[A,B]$ avec $0 < A < B$

d'où ~~$\forall x$~~

On a $F_n(x) = \left(- \dfrac{\cos(x)}{1+(n+1)^2} - \dfrac{(n+1)\sin(x)}{1+(n+1)^2} \right) e^{-(n+1)x}$

$\lim\limits_{x \to 0} F_n(x) = - \dfrac{1}{1+(n+1)^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = 0$ (bornée $\times e^{-(n+1)x}$)

D'après le théorème d'interversion ~~limite~~ somme - limite

$\lim\limits_{A \to 0} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n(0)$

$\lim\limits_{B \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{B \to +\infty} F_n(B)$

8)

$\int_A^B S(x)\,dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_A^B f_n(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_A^B S(x)\,dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n(B) - F_n(A)$

$\int_0^{+\infty} S(x)\,dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{B \to +\infty} F_n(B) - F_n(0)$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} + \dfrac{1}{1+(n+1)^2}$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} + \dfrac{1}{1+n^2}$