Exercice 1 :

1)

a) $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{3^{3(n+1)}\sqrt[3]{(3(n+1))!}} \cdot \frac{3^{3n}\sqrt[3]{(3n)!}}{n!}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3^3\sqrt[3]{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^4} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{(1+\frac{1}{3n})(1+\frac{2}{3n})(1+\frac{1}{n})}}$

$= \frac{1}{3^4}$

$= \frac{1}{81}$

d'où $R = 81$

b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{1}{2n})}$

$= \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1-\frac{1}{2n})}{-\frac{1}{2n}}}$

$= e^{-1/2}$ (car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1-\frac{1}{2n})}{-\frac{1}{2n}} = 1$)

d'où $R = \sqrt{e}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$

$= 1$

donc $R = 1$

d) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} e^{(-1)^n\frac{\ln(\sqrt{n})}{n}}$

$= 1$

donc $R = 1$

2) On a : $|a_n| \leq |b_n|$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|b_n|}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|}$

$\Rightarrow \ell \leq \ell'$ (avec $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\Rightarrow \frac{1}{\ell'} \leq \frac{1}{\ell}$

$\Rightarrow R' \leq R$

. Exercice 2 :

1) Si $x=0$: $f_n(x)=0$

Si $x\neq 0$: $n^a e^{n\ln(x)}(1-x)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^a \dots$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a(1-x)}{e^{-n\ln(x)}}$

$= 0$ (car croissance comparée et $a\in\mathbb{R}^*_+$ et

sur $[0,1)$

d'où $f_n \xrightarrow{c.s} f$ avec $f(x)=0$

2)

On a $|f_n(x)-f(x)| = f_n(x)$

et $\forall x\in[0,1]$:

$f_n'(x) = n^{a+1}x^{n-1}(1-x) - n^a x^n$

$= n^a x^{n-1}(n(1-x)-x)$

$= n^a x^{n-1}(n - x(1+n))$

$= n^a x^{n-1}(1+n)\left(\dfrac{n}{n+1} - x\right)$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n		$\nearrow$	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	

$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

$= n^a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n+1}$

$= \dfrac{n^a}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{-\frac{1}{n+1}}}$

$= e^{-1}$

4) $f_n \xrightarrow{C.U} f$ sur $[0,1]$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^a}{n+1}\right)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^a}{n+1} = 0$ (car $\lim\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$)

$\iff \lim_{n \to +\infty} n^{a-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 0$

$\iff a - 1 < 0$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$

$\iff 0 < a < 1$

Exercice 3 :

1) Soit $x \in [0, 1]$ fixé et $a \in \mathbb{R}^{*+}$

$\sum_{n \geq 1} f_n(x) = (1-x) \sum_{n \geq 1} n^a x^n$

$= (1-x) \sum_{n \geq 1} \frac{n^a}{e^{n \ln(\frac{1}{x})}}$

On a $\lim_{n \to +\infty} n^2 f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{a+2}}{e^{n \ln(\frac{1}{x})}} = 0$ (croissance comparée)

donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVS sur $[0, 1]$

2) D'après (exercice 2) a))

$\sum_{n \geq 1} \| f_n \|_\infty = \sum_{n \geq 1} \frac{n^a}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$

On a $\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \sim e^{-1}$ (D'après exercice 2) b))

et $\frac{n^a}{n+1} \sim n^{a-1}$

d'où $\| f_n \|_\infty \sim e^{-1} n^{a-1}$

Si $a \geq 0$: ~~alors~~ $1 - a \leq 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-1}}{n^{1-a}}$ DV

d'où $\sum_{n \geq 1} \| f_n \|_\infty$ DV

d'où $\sum f_n$ ne CV pas normalement sur $[0, 1]$

Si $a < 0$: $1 - a > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-1}}{n^{1-a}}$ CV

d'où $\sum_{n \geq 1} \| f_n \|_\infty$ CV

d'où $\sum f_n$ CVN sur $[0, 1]$

3) a) Soit $a = 0$ alors $f_n(x) = x^n (1-x)$

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k(1-x)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (1-x)\frac{1-x^n}{1-x}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 1-x^n$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x\in[0,1[\\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

b) On a f_n est continue en 1

et S n'est pas continue en 1

donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne CV pas uniformément sur $[0,1]$

4) a) Soit $x\in[0,1]$ et $a>0$ et $n\geq 1$

$$n\geq 1$$

$$\Rightarrow n^a\geq 1$$

$$\Rightarrow n^a x^n(1-x)\geq x^n(1-x)$$

(car $x^n(1-x)\geq 0$)

b) On a :

On a :

$$(n+k)^a x^{n+k}(1-x)\geq x^{n+k}(1-x)$$

$$R_n(x)\geq \sum_{k=1}^{+\infty} x^{n+k}(1-x)$$

$$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x) \geqslant \sum_{k=1}^{p} x^{n+k}(1-x)$$

$$\geqslant x^{n}(1-x) \cdot \frac{1-x^{p}}{1-x}$$

$$\geqslant x^{n}(1-x^{p})$$

$$x_0 = 1-\frac{1}{n}$$

$$\geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p}\right)$$

$$p \longrightarrow +\infty$$

$$R_n(x_0) \geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x_0) \geqslant e^{-1}$