CY TECH

2023/2024
Semestre 1 – PréIng 2
Mardi 28 Novembre

SÉRIES

DEVOIR SURVEILLÉ 2

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1

1. Énoncer la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
2. Énoncer le théorème d'interversion limite-intégrale.

Exercice 2

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une limite f à déterminer.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
3. La suite (f_n) converge-t-elle localement uniformément sur $[0,1[$?

Exercice 3

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,2]$ par

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n.$$

1. Déterminer le domaine de convergence de la suite (f_n) et sa limite simple qu'on appellera f.
2. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[\alpha, 2-\alpha]$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer
$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$
Indication : on pourra faire une intégration par parties ou un changement de variable $y = 1-x$.
4. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?