Séries

Devoir Surveillé 2

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1

1. Énoncer la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
2. Énoncer le théorème d'interversion limite-intégrale.

Exercice 2

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une limite f à déterminer.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
3. La suite (f_n) converge-t-elle localement uniformément sur $[0,1[$?

Réponse. 1. Pour tout $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$.
Pour $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$.
On conclut que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 0 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

2. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur non nul, et que la limite simple f de la suite est discontinue donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

3. Fixons $a \in]0,1[$ et étudions la convergence de la suite sur $[0,a]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,a]$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1-x^n}{1+x^{2n}} - 1\right| = \left|\frac{1-x^n-1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\right| = \frac{x^n(1+x^n)}{1+x^{2n}} \le \frac{a^n(1+a^n)}{1}$$

où $|a| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \le \lim_{n\to+\infty} a^n(1+a^n) = 0$$

donc la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$, elle converge donc localement uniformément sur $[0,1[$.

Exercice 3

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,2]$ par

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n.$$

1. Déterminer le domaine de convergence de la suite (f_n) et sa limite simple qu'on appellera f.
2. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[\alpha, 2-\alpha]$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer
$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$
Indication : on pourra faire une intégration par parties ou un changement de variable $y = 1-x$.
4. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Réponse.

1. Pour tout $x \in [0,2[$, $|1-x| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2(1-x)^n = 0$ et on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Pour $x = 2$, $f_n(2) = n^2x(-1)^n$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$. Le domaine de convergence de (f_n) est donc $[0,2[$ et sa limite simple est la fonction nulle.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\alpha, 2-\alpha]$: $x \leq 2-\alpha$ et $|1-x| \leq |1-\alpha| < 1$ donc $(1-x)^n \leq (1-\alpha)^n$. On en déduit que $|f_n(x)| \leq n^2(2-\alpha)(1-\alpha)^n$, d'où
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[\alpha,2-\alpha]} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} n^2(2-\alpha)(1-\alpha)^n = 0$$
donc la suite converge uniformément sur $[\alpha, 2-\alpha]$ vers la fonction nulle.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec le changement de variable $y = 1-x$ on calcule
$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = n^2\int_0^1 x(1-x)^n\,\mathrm{d}x = n^2\int_0^1 y^n(1-y)\,\mathrm{d}y = n^2\left[\frac{y^{n+1}}{n+1} - \frac{y^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}.$$
4. Toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ comme produit de fonctions continues. Or
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1 \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
donc par négation du théorème d'interversion limite-intégrale, la convergence de la suite (f_n) ne peut pas être uniforme sur $[0,1]$.