Séries

Devoir Surveillé 2

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (sans justification):

1. Si les (f_n) sont croissantes sur I, alors f aussi.
2. Si les (f_n) sont convexes sur I, alors f aussi.
3. Si les (f_n) sont périodique sur I, alors f aussi.
4. Si les (f_n) sont continues sur I, alors f aussi.

Exercice 2

Soit (f_n) la suite de fonctions définies par:

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une limite simple f à déterminer.
2. Déterminer les α pour lesquels la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. On fixe $\alpha = 1$. Montrer la suite (f_n) converge localement uniformément sur $]0, +\infty[$ (c'est-à-dire que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$).

Exercice 3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par:

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite sur $[0, 1]$.
2. Montrer que: $\left(\ln(1 + 2^n n x^2)\right)' = 2n f_n(x)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{\ln(2)}{2}$

4. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.