2023/2024
Semestre 1 – PréIng 2
Mercredi 29 Novembre

# SÉRIES

## DEVOIR SURVEILLÉ 2

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

► Les documents et les supports électroniques sont interdits.
► L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
► Le barème est à titre indicatif.
► La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

## Exercice 1

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction $f$ sur un intervalle $I$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les $(f_n)$ sont croissantes sur $I$, alors $f$ aussi.
2. Si les $(f_n)$ sont convexes sur $I$, alors $f$ aussi.
3. Si les $(f_n)$ sont continues sur $I$, alors $f$ aussi.

**Réponse.** 1. VRAI.

2. VRAI.
3. FAUX.

## Exercice 2

Soit $(f_n)$ la suite de fonctions définies par:

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une limite simple $f$ à déterminer.
2. Déterminer les $\alpha$ pour lesquels la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. On fixe $\alpha = 1$. Montrer la suite $(f_n)$ converge localement uniformément sur $]0, +\infty[$.

**Réponse.** 1. Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$, et si $x > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ car l'exponentielle l'emporte sur le $n^\alpha$.
La suite $(f_n)$ converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

2. Étudions, à présent, la fonction $\mid f_n(x) - 0 \mid = f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$. On a,

$$f_n'(x) = n^\alpha e^{-nx} - n^{\alpha+1} x e^{-nx} = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx)$$

Ainsi, $f_n'$ est nulle en $\frac{1}{n}$, positive sur $\left[0, \frac{1}{n}\right[$ et négative sur $\left]\frac{1}{n}, +\infty\right[$. $f_n$ atteint donc son maximum en $x_n = \frac{1}{n}$ :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \mid f_n(x) - 0 \mid = f_n(x_n) = n^\alpha \frac{1}{n} e^{-\frac{n}{n}} = \frac{n^{\alpha-1}}{e} := u_n$$

La suite $(u_n)$ tend vers $0 \iff \alpha - 1 < 0 \iff \alpha < 1$. La suite $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ si $\alpha < 1$.

3. Si $\alpha = 1$ alors $f_n(x) = nxe^{-nx}$. Soient $0 < a < b$ deux réels. On a alors $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ et pour tout $x \in [a, b]$,
$$f_n(x) = nxe^{-nx} \leq nbe^{-na}$$
d'où $\sup_{x\in[a,b]} \mid f_n(x) - 0 \mid = \sup_{x\in[a,b]} f_n(x) \leq nbe^{-na} \to 0$ quand $n \to +\infty$ car l'exponentielle l'emporte sur le $n$. La suite $(f_n)$ converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ pour tous $0 < a < b$. Par conséquent, $(f_n)$ converge localement uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.

## Exercice 3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par:
$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n nx^2}$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite sur $[0, 1]$.
2. Montrer que: $(\ln(1 + 2^n nx^2)' = 2nf_n(x)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer
$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\ln(2)}{2}$
4. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.

**Réponse.** 1. Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$. Sinon pour tout $x \in ]0, 1]$ on a:
$$\frac{2^n x}{1 + 2^n nx^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^n x}{2^n nx^2} = \frac{1}{nx} \to 0$$
La suite $(f_n)$ converge donc simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

2. On a $(\ln(U))' = \frac{U'}{U}$, d'où $\quad (\ln(1 + 2^n nx^2))' = \frac{(1 + 2^n nx^2)'}{1 + 2^n nx^2} = \frac{2n2^n x}{1 + 2^n nx^2} = 2nf_n(x)$.

3. D'après le point 2., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2n}\int_0^1 (\ln(1 + 2^n nt^2))'dt = \frac{1}{2n}\big[\ln(1 + 2^n nt^2)\big]_0^1 = \frac{1}{2n}\ln(1 + 2^n n) \\ &= \frac{1}{2n}\ln\Big(2^n n\Big(1 + \frac{1}{2^n n}\Big)\Big) = \frac{n\ln(2) + \ln(n)}{2n} + \frac{1}{2n}\ln\Big(1 + \frac{1}{2^n n}\Big) \\ &= \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(n)}{2n} + \frac{1}{2n}\ln\Big(1 + \frac{1}{2^n n}\Big) \end{aligned}$$
Puisque $\quad \frac{\ln(n)}{n} \to 0 \quad$ et $\quad \ln\Big(1 + \frac{1}{2^n n}\Big) \sim \frac{1}{2^n n} \to 0 \quad$ donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\ln(2)}{2}$

4. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ on aurait:
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(2)}{2} = 0 \quad \text{(absurde)}$$
Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.