Séries

Devoir Surveillé 2

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1

On considère la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n\left(3x^3 - \frac{7}{4}x\right)e^{4x}}{2xn+1}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une limite f à déterminer.

2. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a,1]$ avec $a \in]0,1[$. A-t-on convergence uniforme sur $[0,1]$?

3. Tout en démontrant trouver une constante explicite $C > 0$ telle que pour tout $x \in [0,1]$ on a $|f_n(x) - f(x)| \leq C$.

4. Déduire des questions précédentes la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

Vous devez justifier votre réponse.

5. Si vous montrez que u est convergente que vaut sa limite simplifiée ?

Exercice 2

Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^a x^n(1-x)$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ calculer $\|f_n\|_\infty$ en donnant une expression simplifiée en termes de a et de n.

2. Trouver l'ensemble des valeurs des a tel que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément.

Exercice 3

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$.

2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

3. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1]$.