CY TECH

2023/2024
Semestre 1 – Préing 2
Mercredi 29 Novembre

SÉRIES

DEVOIR SURVEILLÉ 2

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'applications définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ et qui convergent uniformément respectivement vers des fonctions f et g.

1. Éxpliciter la définition de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f.
2. Montrer qu'alors la suite d'applications $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $(f+g)$.

Exercice 2

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x) := \sqrt{n}\arctan\frac{x}{n}$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n'(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}}$. En déduire que la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction que l'on déterminera.
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$: $f_n(x)=\int_0^x f_n'(t)dt$. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par:

$$f_n(x)=\begin{cases} -n^3x^2+2n^2x & \text{si } x\in[0,\frac{2}{n}],\\ 0 & \text{si } x\in[\frac{2}{n},1].\end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite, vers une fonction que l'on déterminera.
2. Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$.
3. Est-ce que $(f_n)_{n\geq 2}$ converge uniformément ?
4. Montrer que $(f_n)_{n\geq 2}$ converge uniformément sur $[a,1]$ pour $a\in]0,1[$.