	Cycle préparatoire 2$^{\text{ème}}$ année **Devoir surveillé 1** *Abdessalam El Janati, Khaoula Guezguez, Ahmed Hajej, Zoghlami Naim*	
	Matière : **Séries**	*Date* : **Dimanche 20 novembre 2022**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 h 30 min**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte **quatre** *exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

◇◇◇

Exercice 1. [7 points]
Soit (u_n) une suite à termes positifs. Déterminer en justifiant, si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = +\infty$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente.
2. À partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
3. $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $(u_n)_n$ converge vers 0.
4. Pour tout réel $x \in]-1,1[$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ converge vers $\frac{1}{1-x}$.
5. Toute série téléscopique est convergente.

Exercice 2. [4 points]
Dans chaque cas, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et déterminer sa somme :

1. $u_n = 2^{n+1}3^{2-n}$;
2. $u_n = \ln(1-\frac{1}{n^2})$

Exercice 3. [4.5 points]
Étudier la nature des séries de suivantes :

$$\sum_{n\geq 0}\left(n\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{2n}{2n+1}\right), \qquad \sum_{n\geq 2}\frac{n}{(\ln(n!))^2}, \qquad \sum_{n\geq 0}\ln\left(\cos\frac{1}{2^n}\right)$$

Exercice 4. [8 points]

Notre objectif est de montrer la divergence de la série Hamonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ avec de deux méthodes différentes.

1. **Méthode 1 :**

   On note, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Montrer que, $\forall n \geqslant 1$,
   $$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t}\,dt$$

   (b) Déduire un équivalent à $(S_n)_n$.

   (c) Déduire la divergence de la série Hamonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

2. **Méthode 2 :**

   On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

   (a) Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$,
   $$R_n \geqslant H_n, \text{ avec } R_n = \sum_{k\geqslant n+1} \frac{1}{k}$$

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, la suite $(H_n)_n$ est minorée par $\frac{1}{2}$.

   (c) Déduire la divergence de la série Hamonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.