CY TECH	**Cycle préparatoire $2^{\text{ème}}$ année** **Devoir surveillé 1** *Didier Cransac, Abdessalam El Janati, Khaoula Guezguez, Ahmed Hajej, Zoghlami Naim*	
	Matière : **Séries**	*Date* : **Vendredi 12 novembre 2021**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 h 30 min**
		Nombre de pages : **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte trois exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1. [8 points]

A) Déterminer la nature de convergence des séries de terme général :

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{n}}\ ; \qquad v_n = 2\ln(n^3+1) - \ln(n^2+1)$$

B) Déterminer la nature de convergence des séries de terme général :

$$a_n = (-1)^n \sin(\frac{1}{n})\ ; \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^n - 1\ ; \qquad c_n = \ln n \times b_n$$

Exercice 2. [5.5 points]

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, $\quad k^3 = k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2)$.

   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{k^3}{k!}$ est convergente et déterminer sa somme.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ est convergente et déterminer sa somme.

Exercice 3. [6.5 points]

Soit $a \in]0,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \\ u_0\ = a \end{cases}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$ est convergente et déterminer sa somme.
4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente. (on pourra utiliser la définition)
5. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$?