EISTI	**Cycle préparatoire 2$^{\text{ème}}$ année** **Devoir surveillé 2** *Abdessalam El Janati, Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Naïm Zoghlami*	
	Matière : **Séries**	*Date* : **Vendredi 18 octobre 2019**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte trois exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Exercice 1.
Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ une séries à termes positifs et $\alpha > 0$.

1. On suppose dans cette question que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.
   (a) Montrer que $u_n \leq 1$ à partir d'un certain rang.
   (b) En déduire que si $\alpha \geq 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose dans cette question que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.
   Montrer que si $\alpha \leq 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n^\alpha$ diverge.
   On pourra raisonner selon si la divergence est grossière ou pas.

Exercice 2.
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a \geq b$. Le but de cet exercice est d'étudier la série numérique de terme général

$$u_n = \left(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+bn+1}\right)^n$$

définie à partir d'un certain rang.

1. Donner le développement limité en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 1 au voisinage de $+\infty$ de $\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+bn+1}$.
2. On suppose dans cette question que $a-b \neq 2$.
   Étudier la nature de la série $\sum u_n$.
3. On suppose dans cette question que $a-b=2$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n u_n)$.
   (b) Que peut-on en déduire ?

Exercice 3.

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right).$$

2. Étudier la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n$ dans chacun des cas suivants :

   (a) $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$

   (b) $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n - 1$

   (c) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

   (d) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

   (e) $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Exercice 4.

Soit f la fonction décroissante définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq +1 + \int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. En calculant les intégrales, déduire un équivalent simple de S_n puis la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

3. Pour $n \geq 1$, on pose

$$a_n = S_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad b_n = S_n - \ln(n+1).$$

   (a) Montrer que les deux suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
   Leur limite commune est notée γ et est applée la constante d'Euler.

   (b) Montrer que

$$S_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n(2n+1)}$.

   (a) Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

   (b) Décomposer en élément simple la fraction rationelle $F(X) = \frac{1}{X(2X+1)}$.

   (c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En regroupant les entiers pairs et impairs dans la somme $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{N}$, et en utilsant la fraction rationnelle F, montrer que

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n+1)} = S_N - S_{2N+1} + 2.$$

   (d) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln(2).$$