Chapitre 5

Équations locales de l'électromagnétisme

I-Introduction:

L'électromagnétisme est fondée sur les quatre équations de Maxwell et l'expression de la force de Lorentz.

Le champ électromagnétique est solution des quatre équations locales ci-dessous dont la justification, l'interprétation et le contenu physique feront l'objet de ce chapitre.

Les quatre équations de Maxwell :

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ , \qquad \overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \qquad div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad et \quad div\vec{B} = \vec{0}$$

Sur le plan historique, chacune de ces quatre équations a été étudiée séparément et a permis de rendre compte d'un phénomène physique donné. Maxwell a eu l'idée de les considérer comme un ensemble indissociable.

Les quatre équations de Maxwell :

II-Conservation de la charge

1) Equation de conservation de la charge

Soit ρ la densité volumique de charges dans un milieu.

La charge totale Q(t) est donnée par : $Q(t) = \iiint \rho\, d\tau$

L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$\frac{d\rho}{dt} = -div\vec{j}$

avec $\vec{j} = \rho\vec{v}$

Expression dans laquelle $\vec{j}$ est le vecteur densité de courant, ρ est la densité volumique de charge et $\vec{v}$ est la vitesse de la charge élémentaire, supposée constante.

l'équation de conservation de la charge peut être obtenue à partir du bilan de charge dans un volume élémentaire, elle peut être aussi obtenue à partir des équations de Maxwell.

2) Démonstration à partir du bilan de charge :

Considérons un tube de courant cylindrique, de volume V, de longueur dl et de surface de base S

sens du courant I

La charge totale contenue dans le tube est donnée par

l'expression : $Q = \iiint \rho d\tau$

L'intensité de courant électrique sortante de ce tube est égale à la charge sortante de ce tube par unité de temps, soit $-\frac{dQ}{dt}$.

$-\frac{d}{dt}(\iiint \rho d\tau) = \iint \vec{j}\,\overrightarrow{ds}$

Par application du théorème d'Ostrogradsky : $\iint \vec{j}\,\overrightarrow{ds} = \iiint div\vec{j}\,d\tau$

d'où $-\frac{d}{dt}(\iiint \rho d\tau) = \iiint div\vec{j}\,d\tau$

ou encore

$\frac{d\rho}{dt} = -div\vec{j}$ équation de conservation de la charge

3) cas particulier du régime permanent

En régime permanent toutes les grandeurs sont indépendantes du temps, donc $\frac{d\rho}{dt} = 0$
d'où $div\vec{j} = 0$
Cette dernière équation implique que le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est à flux conservatif.
Par conséquent l'intensité de courant est la même en tout point d'une branche , c'est le cas du régime continu.
La loi des nœuds découle également de cette même équations puisque $\oiint \vec{j}\,d\vec{S} = 0$ entraine :

$$\sum_k i_k = 0$$

soit la somme des intensités algébriques dans un nœud est égale à zéro.

III-Les équations de Maxwell et la force de Lorentz

1) Les équations de Maxwell.

Le champ électromagnétique est solution des 4 équations locales suivantes:

$div\vec{B} = \vec{0}$: L'équation de Maxwell flux magnétique

$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$: L'équation de Maxwell Gauss

$\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$: L'équation de Maxwell Ampère

$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$: L'équation de Maxwell Faraday

2) Force de Lorentz.

Le champ électromagnétique $\left[\vec{E}(M,t);\vec{B}(M,t)\right]$ en tout point M à l'instant t est créé par les sources :

- La densité volumique de charge au point M' à l'instant t : $\rho(M',t)$
- Le vecteur densité de courant au point M' à l'instant : $\vec{j}(M',t)$

Une charge ponctuelle q animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans une région où existent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ subit la force de Lorentz $\vec{f} = q\left[\vec{E}(M,t) + \vec{v}(M,t)\wedge\vec{B}(M,t)\right]$

3) Propriétés et conséquences des équations de Maxwell

3.1) Le théorème de superposition

Les équations de maxwell sont des équations linéaires en $\vec{E}, \vec{B}, \vec{j}$ *et* ρ, ainsi :
Si aux sources $(\overrightarrow{j_1}, \rho_1)$ correspond le champ électromagnétique $\left[\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{B_1}\right]$
et si aux sources $(\overrightarrow{j_2}, \rho_2)$ correspond le champ électromagnétique $\left[\overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{B_2}\right]$
alors
aux sources $(\overrightarrow{j_1} + \overrightarrow{j_2}, \rho_1 + \rho_2)$ correspond le champ électromagnétique $\left[\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2}\right]$

3.2) validité des équations

Les équations de maxwell sont valables dans tous les milieux, en pratique, on les utilise dans le vide, les plasmas et dans les métaux.

3.3) Le champ électromagnétique est une entité indissociable.

Le champ électrique et magnétique sont les composantes d'une entité unique : le champ électromagnétique.

Dans le cas particuliers des régimes permanents, on peut étudier séparément champ électrique en électrostatique et le champ magnétique en magnétostatique.

Chaque équation de Maxwell caractérise un phénomène physique donnée :

- La création d'un champ électrique par les charges électriques : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- L'absence de charge magnétique : $div\vec{B} = 0$
- La création d'un champ magnétique par un courant électrique :$r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
- Le phénomène d'induction électromagnétique

3.4) Cohérence des équations de Maxwell :

L'étude des équations de maxwell regroupées, plutôt qu'individuelle, permet de caractériser d'avantage de phénomènes physiques. Citons à titre d'exemple la conservation de la charge : $\frac{d\rho}{dt} = -div\vec{J}$, cette équation peut être démontrée à partir des équations de maxwell.

En effet, par application de l'opérateur divergence à Maxwell Ampère (M.A.), on obtient :

$r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (M.A.)

$div(r\vec{o}t\vec{B}) = div(\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$

Or la divergence d'un rotationnel est toujours nulle, donc $div\left(r\vec{o}t\vec{B}\right) = 0$

Le terme $div\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ est égal à $\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial(div\vec{E})}{\partial t}\right)$ car les opérateurs divergence et $\frac{\partial}{\partial t}$ commutent.

D'après l'équation de Maxwell Gauss (M.G.) : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Finalement on a : $div\vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0$ ce qui prouve que la conservation de la charge est contenue dans les équations de Maxwell.

3.5) Constantes et unités

est la perméabilité magnétique, ellecaractérise la faculté d'un matériau à modifier un champ magnétique.

est la permittivité du vide

est la vitesse de la lumière dans le vide

IV- Cas particulier des régimres permanents.

En régime permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{j} = \vec{0}$ les équations de Maxwell s'écrivent :

$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = \vec{0}$ et $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}(M.G.)$

1) Conséquences en électrostatique

1.1) 1ère conséquence : le théorème de Gauss

Par application du théorème d'Ostrogradsky : $\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_{volume} div\vec{E}.d\tau$

On remplace $div\vec{E}$ par $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ d'après M.G. on obtient $\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_{volume} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$

C'est le théorème de Gauss sous sa forme intégrale.

1.2) 2ème conséquence : $\vec{E}$ est à circulation conservative.

En effet, d'après l'équation $\overrightarrow{Rot}\vec{E} = \vec{0}$ et compte tenue du théorème de Stockes : $\int_{contour\,\Gamma} \vec{E}.d\vec{l} = 0$ d'où le champ électrostatique $\vec{E}$ est à circulation conservative.

1.3) 3ème conséquence : Le potentiel électrostatique et l'équation de Poisson.

Par définition le potentiel électrostatique est égal à l'opposé de la circulation du champ électrostatique : $dV = -dC$, avec $dC = \vec{E}.d\vec{l}$
où dC est la circulation élémentaire du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$, le long du parcours élémentaire $d\vec{l}$.
Sous sa forme intégrale $C = V(P) - V(Q) = \int_P^Q \vec{E}.d\vec{l}$
Par ailleurs $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ et par application de l'opérateur divergence à cette dernière équation, on a : $div\vec{E} = -div(\overrightarrow{grad})V$
avec $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $div\left(\overrightarrow{grad}\right)V = \Delta V$ $où$ ΔV est le Laplacien de V
finalement on obtient l'équation de Poisson :

$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ Equation de Poisson, dont la solution générale est donnée par :
$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho(P)d\tau}{\|\overrightarrow{MP}\|}$
Le gradient de cette dernière expression c'est-à-dire le champ électrostatique $\vec{E}$ peut être déduit à son tour, on obtient : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho(P)\overrightarrow{MP}d\tau}{\|\overrightarrow{MP}\|^3}$
Ces deux expressions de $\vec{E}$ et V représentent le fondement de toute l'électrostatique (chapitre 6).

Remarque
Dans une région de l'espace sans charges ($\rho = 0$), l'équation de Poisson porte le nom de l'équation de Laplace : $\Delta V = 0$

2**) Conséquences en magnétostatique**

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\vec{E} = \vec{0}$ d'où les conséquences en magnétostatique :

- $\frac{d\rho}{dt} = -div\vec{j}$ (conservation de la charge) $\rightarrow$ $div\vec{j} = 0$
- $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}(M.G.)$ $\rightarrow \rho = 0$
- $\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (M.A.) $\rightarrow \overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$
- $div\vec{B} = 0$ $\rightarrow \vec{B}$ est à flux conservatif. En effet, $div\vec{B} = 0 \rightarrow \iiint_{volume} div\vec{B}.d\tau = 0$ et par le théorème d'Ostrogradsky :

$\iiint_{volume} div\vec{B}.d\tau = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S}$ au final $\oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0 \rightarrow$ $\vec{B}$ est à flux conservatif.

2.1) Le théorème d'Ampère

$\oint_\Gamma \vec{B}.d\vec{l} = \iint \overrightarrow{Rot}\vec{B}d\vec{S}$ **(** théorème de Stockes) or $\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ d'où :

$\oint_\Gamma \vec{B}.d\vec{l} = \iint \mu_0\vec{j}d\vec{S}$ expression du théorème d'Ampère sous sa forme intégrale.

2.2) Le potentiel vecteur $\vec{A}$

L'équation de conservation du flux : $div\vec{B} = 0$ implique qu'il existe un champ de vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{Rot}\vec{A}$.

Or quelque soit $\overrightarrow{A'}$ tel que $\overrightarrow{A'} = \vec{A} + \overrightarrow{grad}f$, $\overrightarrow{A'}$ est aussi solution car $\overrightarrow{Rot}\vec{A}' = \overrightarrow{Rot}(\vec{A} + \overrightarrow{grad}f) = \overrightarrow{Rot}\vec{A}$ puisque $\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}f) = 0$ quelque soit la fonction scalaire f.

Pour avoir une solution unique du potentiel vecteur $\vec{A}$, ce dernier doit satisfaire la condition de jauge. La jauge utilisée en magnétostatique est la jauge de Coulomb, cette dernière est donnée par l'expression : $div\vec{A}$=0.

On dit que $\vec{A}$ est le potentiel vecteur dont dérive $\vec{B}$: $\vec{B} = \overrightarrow{Rot}\vec{A}$.

Expression du potentiel vecteur$\vec{A}$(M) en tout point de l'espace M :

$\overrightarrow{Rot}\vec{A} = \vec{B}$

L'application de l'opérateur rotationnel à cette dernière équation donne :

$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{Rot}\vec{A}) = \overrightarrow{Rot}\vec{B}$

or $\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{Rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$ avec $div\vec{A} = 0$
et comme $\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ d'où

$\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{J} = 0$

La solution de cette équation sans démonstration est donnée par :

$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\vec{J}(P)d\tau}{\|\overrightarrow{MP}\|}$ son rotationnel permet de déduire l'expression de $\vec{B}(M)$:

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\vec{J}(P)\Lambda\overrightarrow{PM}d\tau}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$ cette expression est tout à fait la même que celle donnée par la définition de Bio et Savart au début du cours de magnétostatique (chapitre 6).
On remarque que les équations de Maxwell contiennent la loi de Bio et Savart, sachant que celle-ci est une loi d'origine expérimentale.

V-Contenus physiques des équations de Maxwell

1) le théorème de Gauss

La conservation de la charge : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et l'utilisation du théorème d'Ostrogradsky : $\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_{volume} div\vec{E}.d\tau = \iiint_{volume}\frac{\rho}{\varepsilon_0}d\tau = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Le théorème de Gauss apparaît ainsi encore valable en EM,
même si les charges électriques peuvent être en mouvement.

2) le théorème d'Ampère généralisé

On calcule la circulation à un instant donné du champ magnétique le long d'un contour (C) sur lequel s'appuie une surface (S) et on utilise l'équation de MA :

$$\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

d'où :

$$\oint_\Gamma \vec{B}.d\vec{l} = \iint \overrightarrow{Rot}\vec{B}d\vec{S} = \iint (\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})d\vec{S}$$

or l'intensité de courant $i = \iint \vec{J}d\vec{S}$

$$\oint_\Gamma \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0(i + \iint \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{S})$$

$$i_D = \iint \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{S}$$

S'interprète comme le courant de déplacement à travers la surface S.

En régime permanent, on retrouve bien évidemment le théorème d'Ampère classique :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 i$$

3) Equation du flux magnétique et champ magnétique à flux conservatif

A partir de l'équation locale : $div\vec{B} = 0$ et par application du le théorème d'Ostrogradsky on a: $\oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = \iiint_{volume} div\vec{B}.d\tau = 0 \rightarrow \oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$

Le champ magnétique est à flux conservatif. Par conséquent :
•Le flux magnétique se conserve à chaque instant à travers toute section d'un tube de champ magnétique: Φ1 =Φ2

•Il est possible de définir le flux magnétique Φ qui traverse un contour (Γ) sans avoir à préciser la surface (S) qui s'appuie sur celui ci. (th. de Stockes)

4) Equation de Maxwell-Faraday et loi de Faraday :

On évalue la circulation e du champ électrique le long d'un contour (Γ) fermé sur lequel s'appuie une surface (S) et on utilise l'équation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}.d\vec{l} = \iint \overrightarrow{Rot}\vec{E}d\vec{S} = \iint \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}d\vec{S}$$

or

$\oint_{\Gamma} \vec{E}.d\vec{l} = e$ (la f.e.m) et $\iint \vec{B}d\vec{S} = \Phi$ (le flux de $\vec{B}$)

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

En régime permanent :
$\boldsymbol{e} = \oint_{\Gamma} \vec{E}.d\vec{l} = 0$ et $\overrightarrow{Rot}\vec{E} = \vec{0}$

Le champ électrique permanent est à circulation conservative.
On peut définir un potentiel scalaire tel que : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

En régime non permanent : la circulation du champ s'identifie à la fém qui est induite sur (**Γ**). On démontre ainsi la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

dégagée expérimentalement par Faraday en 1831.

VI- Existence des potentiels $\vec{A}$ et V, jauge de Lorentz, cas de l'ARQS :

1) Rappels mathématiques :

Un champ égal à un gradient a un rotationnel nul et un champ égal à un rotationnel a une divergence nulle :

$$\vec{a} = \overrightarrow{grad}\, f \;\; \rightarrow \;\overrightarrow{rot}\; \vec{a} = \vec{0}$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{rot}\vec{d} \;\rightarrow div\vec{c} = \vec{0}$$

Réciproquement, on peut montrer que :
- Si un champ vectoriel a un rotationnel nul, il existe au moins Un champ scalaire dont il est le gradient.
- Si un champ vectoriel a une divergence nulle, il existe au moins un champ vectoriel dont il est le rotationnel.

2) Définition des potentiels $\vec{A}$ et V.

L'équation $div\vec{B} = \vec{0}$ et la propriété précédente permettent de définir un champ vectoriel A appelé potentiel vecteur tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$$

L'équation de Maxwell-Faraday devient:

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = \; -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{A})$$

Soit

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0}$$

Il existe donc au moins un champ scalaire que l'on

Notera $-V$ (V est appelé potentiel scalaire) tel que: $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\, V$

soit $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}\, V$

dans le cas du régime permanent $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$

on retrouve l'expression classique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

VII- Equations de Maxwell dans un conducteur et relations de passage du champ électromagnétique.

1) Equations de Maxwell dans un conducteur

Dans le cadre de l'ARQS le champ électromagnétique vérifie les équations de Maxwell simplifiées :

$$div\vec{E} = 0$$

$$div\vec{B} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Ainsi, dans un conducteur, l'ARQS ne diffère des régimes stationnaires que par la prise en compte des phénomènes d'induction (équation de Maxwell-Faraday).

2) Relations de passage du champ électromagnétique

2.1) Le champ électrique

$\Delta\vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$

La discontinuité du champ électrique lors de la traversée d'une surface chargée est égale à la densité surfacique de charge σ divisée par ε_0. $\vec{n}_{1\to 2}$ étant le vecteur unitaire normal à la surface chargée et orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

Seule la composante du champ électrique normale à la surface de séparation des deux milieux est discontinue.

La composante tangentielle du champ électrique est continue.

2.2) Le champ magnétique

$$\Delta\vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n}_{1\to 2}$$

d'où la continuité de la composante normale et la discontinuité de la composante tangentielle.

VIII. Densité volumique d'énergie électromagnétique, vecteur de Poynting, équation locale de conservation de l'énergie.

1. Puissance volumique cédée par le champ EM à la matière :

Un champ EM (E, B) va interagir avec des particules chargées et leur fournir de l' énergie. En effet, une charge q est soumise de la part de ce champ EM à la force de Lorentz, dont la puissance s'écrit :

$$P_L = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{v} \ = q\vec{E}.\vec{v}$$

2 Equation locale de conservation de l'énergie :

Par analogie avec les équations de conservation (charge, masse, diffusion, chaleur), on souhaite obtenir une équation du type :

$$\frac{\partial e_{em}}{\partial t} + div\vec{\pi} = \ -\vec{j}\,.\vec{E}$$

$\boldsymbol{e_{em}}$ est l'énergie électromagnétique volumique (contenue dans le champ EM) et $\vec{\pi}$ un vecteur (appelé vecteur de Poynting) sensé donner le sens des échanges d'énergie EM (notamment par le calcul de son flux à travers une surface).
L'énergie E.M. totale $\boldsymbol{E_m(t)}$ comprise dans le volume V à l'instant t vaut :

$$\boldsymbol{E_m(t)} = \iiint_{\boldsymbol{V}} e_{em}\, \boldsymbol{d\tau}$$

e_{em} étant la densité volumique d'énergie électromagnétique, $\boldsymbol{d\tau}$ est l'élément de volume.

Démonstration :

L'équation de conservation de la charge s'écrit:

$div\vec{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0$

on exprime le produit $\vec{j}\,.\vec{E}$ à partir de l'équation de Maxwell-Ampère :

$\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \ \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$\vec{j}\,.\vec{E} = \ \frac{\vec{E}}{\mu_0}(\overrightarrow{Rot}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$

or :

$$div\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right) = \vec{B}.\overrightarrow{Rot}\vec{E} - \vec{E}.\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \vec{B}.(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}) - \vec{E}.\overrightarrow{Rot}\vec{B}$$

d'où :

$\vec{E}.\overrightarrow{Rot}\vec{B} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\overrightarrow{B^2}}{\partial t}) - div\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right)$

$$\vec{j}\,.\vec{E} = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial \overrightarrow{B^2}}{\partial t} - div\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right) - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial \overrightarrow{E^2}}{\partial t}$$

finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) = -\frac{div\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right)}{\mu_0} - \vec{j}\,.\vec{E}$$

Posons :

$e_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$: la densité volumique d'énergie électromagnétique

$\vec{\pi} = \frac{\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right)}{\mu_0}$: vecteur de Poynting

L'équation précédente s'écrit :

$\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = -div\vec{\pi} - \vec{j}\,.\vec{E}$: équation du bilan d'énergie électromagnétique.

La forme intégrale de ce bilan d'énergie dans un volume V s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V e_{em}\,d\tau\right) = -\oiint \vec{\pi}.\,d\vec{S} - \iiint_V \vec{j}\,.\vec{E}\,d\tau$$

Remarque : Vitesse de propagation de l'énergie.

Par analogie avec l'équation de conservation de la charge, on peut définir la vitesse de propagation de l'énergie (notée $\vec{u}$) par la relation : $\vec{u} = \frac{\vec{\pi}}{e_{em}}$

IX-Les équations de propagation du champ EM :

Soit une distribution de charges localisées autour d'un point O, dont les densités sont fonction du temps (exemple : une antenne métallique). Selon les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère, cette distribution est la source de champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans tout le voisinage de O.

1) obtention des équations de propagation du champ EM :

On calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \longrightarrow \overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{Rot}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{Rot}\vec{B})$$

Or $\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{Rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

Avec $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

D'où $\overrightarrow{grad}(\frac{\rho}{\varepsilon_0}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$

Soit, finalement : $\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overrightarrow{grad}\ \rho + \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$
C'est l'équation de propagation du champ électrique.

Pour la propagation du champ magnétique on a: or

$$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{Rot}\vec{B}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{B}) - \Delta\vec{B} = \mu_0\overrightarrow{Rot}\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{Rot}\vec{E})$$

d'où l'équation de propagation du champ magnétique :

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\overrightarrow{Rot}\vec{j}$$

<u>2) cas particulier de la propagation des ondes E.M. dans le vide sans charges ni courants :</u>

$\rho = 0\ et\ \vec{j} = \vec{0}$

d'où :

$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$
et
$\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

C'est l'équation de D'Alembert

X- Effet de peau dans un conducteur ohmique. Longueur de pénétration dans un métal :

Un champ EM pénètre dans un métal bon conducteur de conductivité σ. Par action du champ électrique, les électrons du métal sont accélérés et fournissent une partie de leur énergie cinétique par chocs avec les ions positifs du réseau métallique. L'énergie de l'onde est dissipée par effet Joule ce qui cause l'amortissement de l'onde.

On cherche à calculer la distance caractéristique d'amortissement ou profondeur de pénétration. Pour cela, on considère un métal de conductivité σ pour lequel on cherche une solution des équations de Maxwell correspondant à des champs sinusoïdaux de pulsation ω.

$\vec{E} = E_0 f(x) expi(kx - \omega t)\vec{u}_z$

$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ soit $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B}$ d'où l'expression de $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} E_0(-kf(x) + if'(x)) expi(kx - \omega t)\vec{u}_z$$

Les résultats obtenus restent valables pour une géométrie cylindrique ; ainsi, un câble cylindrique homogène de section droite circulaire ne peut être parcouru par des courants que dans un zone cylindrique superficielle d'épaisseur quelques δ.

Il ne sert à rien pour transporter un courant électrique sinusoïdal d'utiliser un câble en cuivre de rayon nettement supérieur à δ.