CC3

Électromagnétisme

26 Janvier 2023 — PréIng2

Durée : 1h30 (2h en cas de tiers temps)

Sont interdits :

— les documents ;

— tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même que les montres connectées ;

— les déplacements et les échanges.

Consignes :

1. Vérifiez que le sujet est composé de 10 pages et 19 questions ;
2. Seules les dernières feuilles doivent être rendues ;
3. Les questions à rédiger, sur les dernières feuilles, sont indiquées par une icône ♣ ;
4. Remplir complètement au stylo noir la case correspondant à la bonne réponse ;
5. Complétez avec vos nom, prénom et groupe cette dernière feuille dès le début officiel de l'épreuve ;
6. Chaque question ne comporte qu'une seule réponse ;
7. Il n'y a pas de point négatif pour une mauvaise réponse ;
8. Une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée.

Le barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours (5 points)

Question 1 (1 point) La **loi de Biot et Savart** permet de calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ en M, pour un fil filiforme parcouru par un courant I. Elle s'énonce :

■ $\overrightarrow{B}(M) = \oint\limits_{P\in \text{ fil}} \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$

[B] $\overrightarrow{B}(M) = \oint\limits_{P\in \text{ fil}} \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^2}$

[C] $\overrightarrow{B}(M) = \oint\limits_{P\in \text{ fil}} \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{MP}}{MP^2}$

[D] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 2 (1 point) Le **théorème d'Ampère** relie le *champ magnétique* $\overrightarrow{B}$ et l'*intensité* des courants I_i (comptés algébriquement) qui traversent toute surface ouverte S, s'appuyant sur un contour Γ. Il s'énonce :

■ $\oint\limits_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum\limits_i I_i$

[B] $\oiint\limits_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum\limits_i I_i$

[C] $\oint\limits_{\Gamma} \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum\limits_i I_i$

[D] $\oiint\limits_{\Gamma} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0 \sum\limits_i I_i$

[E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 (1 point) Soient la densité de courant $\overrightarrow{j}$ et la densité volumique de charges ρ, l'équation locale de conservation de la charge électrique s'écrit alors :

[A] $\text{div}\,\overrightarrow{j} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

[B] $\text{div}\,\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

[C] $\text{div}\,\overrightarrow{j} - \varepsilon_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

■ $\text{div}\,\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

[E] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 4 (1 point) Les quatre équations de Maxwell pour le champ éléctromagnétique sont :

[A] $\text{div}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

■ $\text{div}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

[C] $\text{div}\,\overrightarrow{E} = \rho$; $\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$; $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

[D] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 5 (1 point) La loi d'Ohm locale, pour un conducteur de conductivité γ, s'écrit :

[A] $\overrightarrow{j} = \gamma^2 \overrightarrow{E}$

■ $\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$

[C] $\overrightarrow{j} = \dfrac{\overrightarrow{E}}{\gamma}$

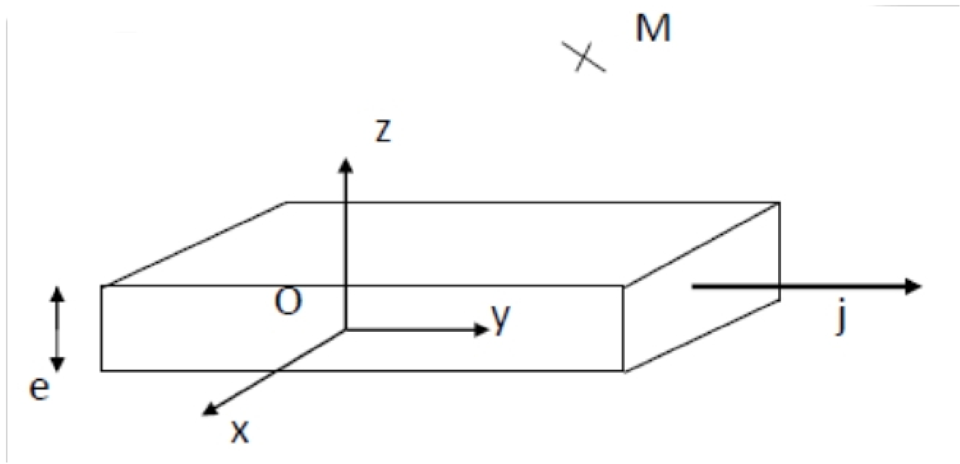
[D] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Pavé infini (2 points)

Un pavé d'épaisseur e et de dimensions infinies, est parcouru par un courant uniforme et constant, de vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$ constant, comme détaillé sur la figure ci-dessous.

On repère un point M de l'espace dans la base de coordonnées cylindriques : $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$. Le plan Oxy est le plan médian du pavé ; l'axe Oz est perpendiculaire à ses faces.

Le courant uniforme circule dans le sens de l'axe (Oy) orienté.



Soit $\overrightarrow{B}(M)$, le champ magnétique créé par cette distribution de courants en tout point $M(x, y, z)$ de l'espace.

Question 6 (1 point) En cherchant les plans de symétrie et d'antisymétrie du champ magnétique, on trouve que :

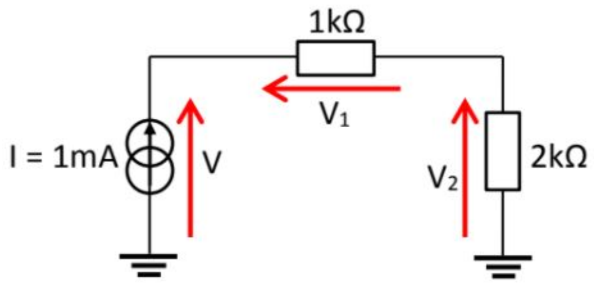
- [A] Le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ est perpendiculaire au plan parallèle à (xOz) en M.
- ■ Le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ est perpendiculaire au plan (yOz) en M.
- [C] Le plan parallèle au plan (yOz) en M est un plan d'antisymétrie.
- [D] Le plan parallèle au plan (xOz) en M est un plan de symétrie.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 (1 point) De plus, en regardant les invariances, le vecteur champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ s'écrit :

- ■ $\overrightarrow{B}(M) = B(z)\overrightarrow{u}_x$
- [B] $\overrightarrow{B}(M) = B(z)\overrightarrow{u}_y$
- [C] $\overrightarrow{B}(M) = B(x, y)\overrightarrow{u}_z$
- [D] $\overrightarrow{B}(M) = B(x, y)\overrightarrow{u}_x$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Électrocinétique (4 points)

Soit le circuit suivant composé d'un générateur de courant ($I = 1\,\text{mA}$) et de deux résistances $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$ et $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$.



Question 8 **(1 point)** La loi des mailles reliant les tensions dans ce circuit s'écrit :

- [A] $V = V_1 - V_2$
- ■ $V = V_1 + V_2$
- [C] $V + V_1 + V_2 = 0$
- [D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

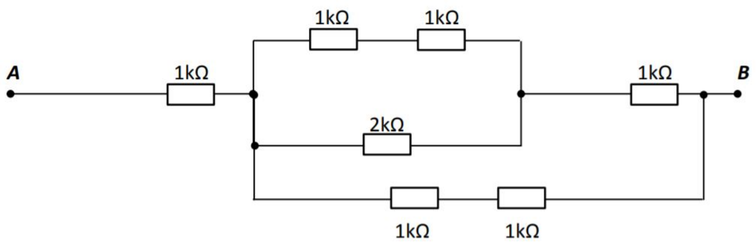
Question 9 **(1 point)** Donc, en appliquant la loi d'Ohm, la tension V aux bornes du générateur s'écrit :

- [A] $V = \dfrac{I}{R_1} - \dfrac{I}{R_2}$
- ■ $V = R_1 I + R_2 I$
- [C] $V = \dfrac{I}{R_1} + \dfrac{I}{R_2}$
- [D] $V = R_1 I - R_2 I$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 **(1 point)** La valeur de la tension V aux bornes du générateur de courant vaut alors :

- [A] $V = 3\,\text{kV}$
- [B] $V = 0{,}5\,\text{V}$
- ■ $V = 3\,\text{V}$
- [D] $V = 2\,\text{V}$
- [E] $V = 2\,\text{kV}$
- [F] $V = 1{,}5\,\text{V}$
- [G] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 **(1 point)** Soit le réseau de résistances suivant :



La valeur de la résistance équivalente notée R_{AB} entre A et B est :

- [A] $R_{AB} = 1\,\text{k}\Omega$
- [B] $R_{AB} = 1{,}5\,\text{k}\Omega$
- ■ $R_{AB} = 2\,\text{k}\Omega$
- [D] $R_{AB} = 2{,}5\,\text{k}\Omega$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Fil infini (5 points)

On considère un fil de longueur infinie, confondu avec l'axe (Oz). Il est parcouru par un courant I constant orienté vers les z croissants.

On repère un point M de l'espace dans la base de coordonnées cylindriques : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

On cherche l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ généré par ce fil au point M.

Question 12 **(1 point)** En regardant les invariances, le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ ne dépend que de :

- [A] θ
- [B] z
- [C] φ
- ■ r
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 **(1 point)** Du fait des symétries, le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ s'écrit :

- [A] $\vec{B}(M) = B(\theta)\vec{u}_\theta$
- ■ $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$
- [C] $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_z$
- [D] $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_r$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 **(1 point)** En utilisant le théorème d'Ampère, on peut écrire le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$:

- [A] $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{\pi z}\vec{u}_r$
- [B] $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{\pi z}\vec{u}_\theta$
- ■ $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$
- [D] $\vec{B}(M) = \dfrac{2\mu_0 I}{\pi r}\vec{u}_z$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

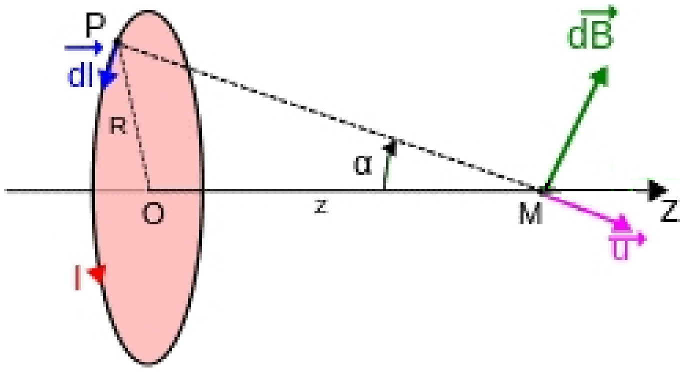
Question 15 ♣ **(2 points)** Détailler les calculs permettant d'obtenir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$.

Spire (6 points)

Une spire de centre O et de rayon R est parcourue par un courant d'intensité I constante (cf. figure ci-dessous).

On repère un point M de l'espace dans la base de coordonnées cylindriques : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

On cherche l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en un point M de l'axe de révolution de cette spire.



Question 16 **(1 point)** Du fait des invariances, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ ne dépend que de :

- A r
- B φ
- C θ
- ■ z
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 17 **(1 point)** Du fait des symétries, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est de la forme :

- A $\vec{B}(M) = B(\theta)\vec{u}_\theta$
- B $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_r$
- C $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_z$
- ■ $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_z$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 18 **(2 points)** Par intégration en utilisant la *loi de Biot et Savart*, en tout point de son axe, à une distance z, le champ magnétique $\vec{B}$ s'écrit :

- A $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{R}\sin^3(\alpha)\vec{u}_\theta$
- B $\vec{B}(M) = \dfrac{2\mu_0 I}{R}\sin^3(\alpha)\vec{u}_z$
- ■ $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\vec{u}_z$
- D $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{R}\sin^3(\alpha)\vec{u}_r$
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 19 ♣ **(2 points)** Détailler les calculs permettant d'obtenir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$.

Correction

Nom et prénom :

....

....

Groupe :

Les réponses ne doivent être apportées que sur cette feuille.
La copie ne sera corrigée que si :

- **elle comporte vos nom, prénom et groupe ;**
- **les cases sont complètement coloriées avec un stylo noir ;**
- **la feuille réponse ne comporte pas de ratures.**

Question 1 : ■ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 2 : ■ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

Question 3 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ ■ $\boxed{E}$

Question 4 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 5 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 6 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

Question 7 : ■ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

Question 8 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 9 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

Question 10 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{F}$ $\boxed{G}$

Question 11 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

Question 12 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ ■ $\boxed{E}$

Question 13 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

Question 14 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

Question 16 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ ■ $\boxed{E}$

Question 17 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ ■ $\boxed{E}$

Question 18 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

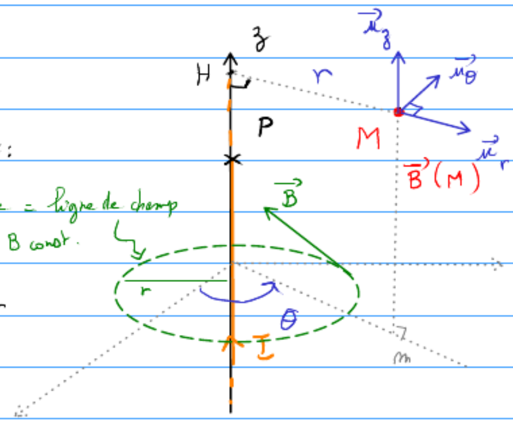
Question 15 : **Fil infini** *Réservé à l'enseignant(e)*

H : projeté orthogonal de M sur l'axe Oz : $z_H = z_M$

⓪ Définition, continuité de $\vec{B}$: distribution linéique (fil) du courant
$\Rightarrow$ $\vec{B}$ diverge sur le fil ($r=0$: divergence)

① Système de coordonnées choisi : coord. cylindriques $\vec{B}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$
. Base $= (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$
. origine O ; sur le fil « où on veut » car fil ∞ $H = O$

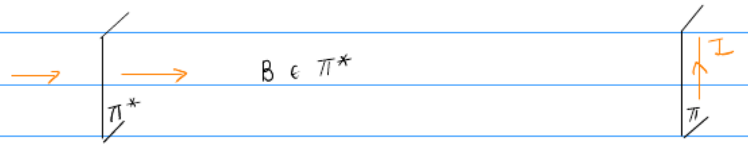
② Invariances : (courant)
↳ invariance par rotation autour de l'axe Oz de la distrib. de courant :
$\vec{B}$ ind. de θ



↳ fil ∞ : invariance par translation selon z de la distrib. de courant :
$\vec{B}$ ind. de z

$\vec{B}(r)$

③ Symétries : $\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$ (cf question 1))
• $\Pi^* = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ plan d'antisymétrie



$\boxed{\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta}$ 0,5 pt

• $\Pi = (M, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$ plan de symétrie $B \perp \Pi \Rightarrow \vec{B} = B\,\vec{u}_\theta$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{B(r)}_{\text{cst}}\, \vec{u}_\theta \cdot r\, d\theta\, \vec{u}_\theta = r\,B(r)\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi r\,B(r)$$

$\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta = 1$ 0,5 pt

donc $2\pi\, r\, B(r) = \mu_0\, I_{\text{enlacés}} = \mu_0\,(+I)$

$$\boxed{\vec{B} = \left(\frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\right)\vec{u}_\theta}$$ 1 pt

Question 19 : Spire circulaire [redacted] *Réservé à l'enseignant(e)*

$$\bullet \quad \vec{B} = \int_{spire} \vec{dB} = \int_{spire} \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{I\,\vec{d\ell} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}\right)$$

$$\vec{d\ell} = d\ell_\theta\,\vec{u}_\theta = R\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\,\vec{u}_r - z\,\vec{u}_z$$

$$\|\vec{PM}\|^2 = R^2 + z^2$$

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ + −

$\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -\vec{u}_z$

$\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = +\vec{u}_r$

$$\vec{B} = \int_{spire} \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,R\,d\theta\,\vec{u}_\theta \wedge (-R\vec{u}_r - z\vec{u}_z)}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

constant

1 pt

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2+z^2)^{3/2}}\left[\int_{\theta=0}^{2\pi} R\,d\theta\,\vec{u}_z + \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi}(-z)\,d\theta\,\vec{u}_r(\theta)}_{=\vec{0}\ \text{(vecteur s'annule 2 à 2)}}\right] = B(z)\,\vec{u}_z$$

constant

$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y$$

$$\int_0^{2\pi}\vec{u}_r\,d\theta = \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right)}_{[\sin\theta]_0^{2\pi} = 0}\vec{u}_x + \underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\right)}_{-[\cos\theta]_0^{2\pi} = -(1-1) = 0}\vec{u}_y = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{\cancel{4}_{2}\,\pi\,(R^2+z^2)^{3/2}}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\vec{u}_z = \left(\frac{\mu_0 I}{2}\right)\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{u}_z}$$

($\int_0^{2\pi} d\theta = \cancel{2\pi}$)

1 pt

ou

$$\sin\alpha = \frac{R}{\|\vec{PM}\|} = \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}} \Longrightarrow \sin^3\alpha = \frac{R^3}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \left(\frac{\mu_0 I}{2R}\right)\sin^3\alpha\,\vec{u}_z}$$

....

Feuille supplémentaire - (indiquer le numéro de la question rédigée)