CC2

Électromagnétisme

02 Décembre 2021 — PréIng2

Durée : 1h30 (2h en cas de tiers temps)

Consignes :

- *les documents sont interdits ;*
- *tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même les montres connectées sont interdits ;*
- *les déplacements et les échanges sont interdits.*

Instructions pour répondre :

- *vérifier que le sujet est composé de 8 pages ;*
- *veillez à ne pas dégrafer les feuilles ;*
- *chaque question ne comporte qu'une seule réponse vraie ;*
- *remplir complétement en noir la case correspondant à la bonne réponse ;*
- *utiliser un crayon à papier pour colorier les cases et faire les schémas ;*
- *une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée.*

Identification

Veuillez coder votre numéro d'étudiant à gauche, et compléter la case à droite. Ce numéro se trouve après votre date de naissance sur votre carte étudiante. La première colonne code le premier chiffre, ...

☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9

Nom et prénom :

....

....

Groupe :

....

Questions de cours (3 points)

(0,5pt) **Q.1** La circulation C du champ électrostatique $\vec{E}$ est donnée par :

$C = \iint_S \vec{E}\,.\,\vec{dS}$

$C = \iiint_V \vec{E}\,.\,\vec{dV}$

$C = \int_A^B \vec{E}\,.\,\vec{dl}$

Aucune de ces réponses n'est correcte.

(0,5pt) **Q.2** Puisque le champ électrostatique $\vec{E}$ est à circulation conservative, on définit la fonction potentiel électrostatique par :

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

$\vec{E} = \overrightarrow{grad}V$

$\vec{V} = \overrightarrow{grad}E$

Aucune de ces réponses n'est correcte.

(0,5pt) **Q.3** Le théorème de Gauss énonce que le flux Φ du champ $\vec{E}$, à travers une surface fermée S est relié à la charge intérieure q_{int}, contenue dans le volume V délimité par la surface S par :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = q_{int}$$

$$\Phi = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{dV} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Aucune de ces réponses n'est correcte.

(0,5pt) **Q.4** La variation dV d'un champ scalaire $V(M)$ est donnée par $dV(M) = \overrightarrow{grad}V \cdot d\overrightarrow{OM}$, où $\overrightarrow{grad}V$ est le gradient du champ scalaire V. Le vecteur gradient $\overrightarrow{grad}V$ est donc :

tangent à la surface équipotentielle passant par M de la fonction scalaire $V(M)$.

un vecteur directeur de la surface équipotentielle passant par M de la fonction scalaire $V(M)$.

normal à la surface équipotentielle passant par M de la fonction scalaire $V(M)$.

Aucune de ces réponses n'est correcte.

(0,5pt) **Q.5** Dans le cas d'une distribution volumique de charges, le potentiel électrique est :

défini sur la surface chargée et il n'est pas continu à la traversée de la surface.

n'est pas défini sur les points où se trouvent les charges.

défini et continu en tout point de l'espace.

Aucune de ces réponses n'est correcte.

(0,5pt) **Q.6** L'énergie potentielle d'interaction entre une charge q et un champ électrostatique $\vec{E}$ créant le potentiel V est :

$E_p = qV + K$

$E_p = qE + K$

$E_p = -qV + K$

Aucune de ces réponses n'est correcte.

Exercice 1 - Cylindre chargé en volume (9 points)

On considère une distribution volumique uniforme de charges, répartie dans le volume d'un cylindre plein de rayon R et de longueur infinie. La densité volumique de charges ρ est constante et positive.

Q.7 (1 point) Dans la base de coordonnées cylindriques, le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution est :

dirigé selon (Oz).
de direction quelconque.
radiale.
appartient aux plans d'antisymétrie.
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.8 (1 point) Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(r)$, à la distance r de l'axe du cylindre, par application du théorème de Gauss, dans le cas où le point M est à l'*extérieur* du cylindre :

$E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$
$E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$
$E(r) = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0 r}$
$E(r) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 r}$
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.9 (1 point) Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(r)$, à la distance r de l'axe du cylindre, par application du théorème de Gauss, dans le cas où le point M est à l'*intérieur* du cylindre :

$E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$
$E(r) = \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0}$
$E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$
$E(r) = \frac{\rho r}{\epsilon_0}$
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.10 (1 point) Le potentiel électrostatique, en tout point M, à l'*intérieur* du cylindre a pour expression :

$V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + constante$
$V(r) = \frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + constante$
$V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + constante$
$V(r) = \frac{\rho r^2}{\epsilon_0} + constante$
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.11 (1 point) Le potentiel électrostatique, en tout point M, à l'*extérieur* du cylindre a pour expression :

$V(r) = -\frac{\rho R^2}{\epsilon_0} \ln r + constante$
$V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + constante$
$V(r) = \frac{\rho R^2}{\epsilon_0 r} + constante$
$V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + constante$
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.12 (1 point) Si on fixe $V(r = R) = 0$, le potentiel électrostatique, en tout point M, à l'*intérieur* du cylindre est tel que la constante vaut :

$constante = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$
$constante = -\frac{\rho R^2}{\epsilon_0}$
$constante = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$
$constante = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R$
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.13 Retrouver l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ par application du théorème de Gauss, à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

☐-0.5 ☐-1 ■2 *Réservé à l'enseignant(e)*

⓪ Définition et continuité : si distribution volumique des charges ⇒ $\vec{E}$ défini et continu sur tout l'espace.

① coordonnées cylindriques : $(O; (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z))$

$\vec{dl}$ =	$\vec{dS}$ =
dr	$r\,d\theta\,dz$ (dS_r)
$r\,d\theta$	$dr\,dz$ (dS_θ)
dz	$r\,dr\,d\theta$ (dS_z)

② Invariances : × si on tourne la distribution de charge de θ ⇒ reste inchangée : $\vec{E}(r, \cancel{\theta}, z)$

× cylindre infini selon l'axe Oz ⇒ si on translate la distrib. de charge selon Oz ⇒ reste inchangée → invariance suivant z. $\vec{E}(r, \theta, \cancel{z})$

③ Symétries :

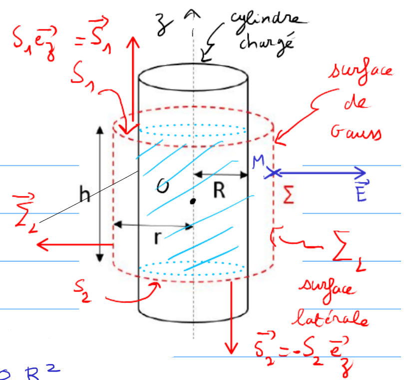
- Tout plan P_1, passant par M, défini par $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, est un plan de symétrie ⇒ $\vec{E} \in P_1$
- Tout plan P_2, passant par M, défini par $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est " " " ⇒ $\vec{E} \in P$

$\vec{E}$ selon $\vec{e}_r$ direction commune aux 2 plans de symétrie.

$$\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r}$$

(0,5 point)

④ Théorème de Gauss : $\boxed{\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$



$\Phi = 2\pi r h\,E(r)$ ⇒ $E(r) = \left(\dfrac{1}{2\pi r h}\right)\dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

(0,5 point)

pour le calcul de q_{int}, 2 cas possible :

$\begin{cases} r \geq R : q_{int} = Q \text{ totale sur une hauteur} & (i) \\ r \leq R : q_{int} = \text{portion de la charge du cylindre.} & (ii) \end{cases}$

(i) $r \geq R$: $q_{int} = \rho(\pi R^2 h)$ ⇒ $E(r \geq R) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$ (0,5 point)

(ii) $r \leq R$: $q_{int} = \rho(\pi r^2 h)$ ⇒ $E(r \leq R) = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ (0,5 point)

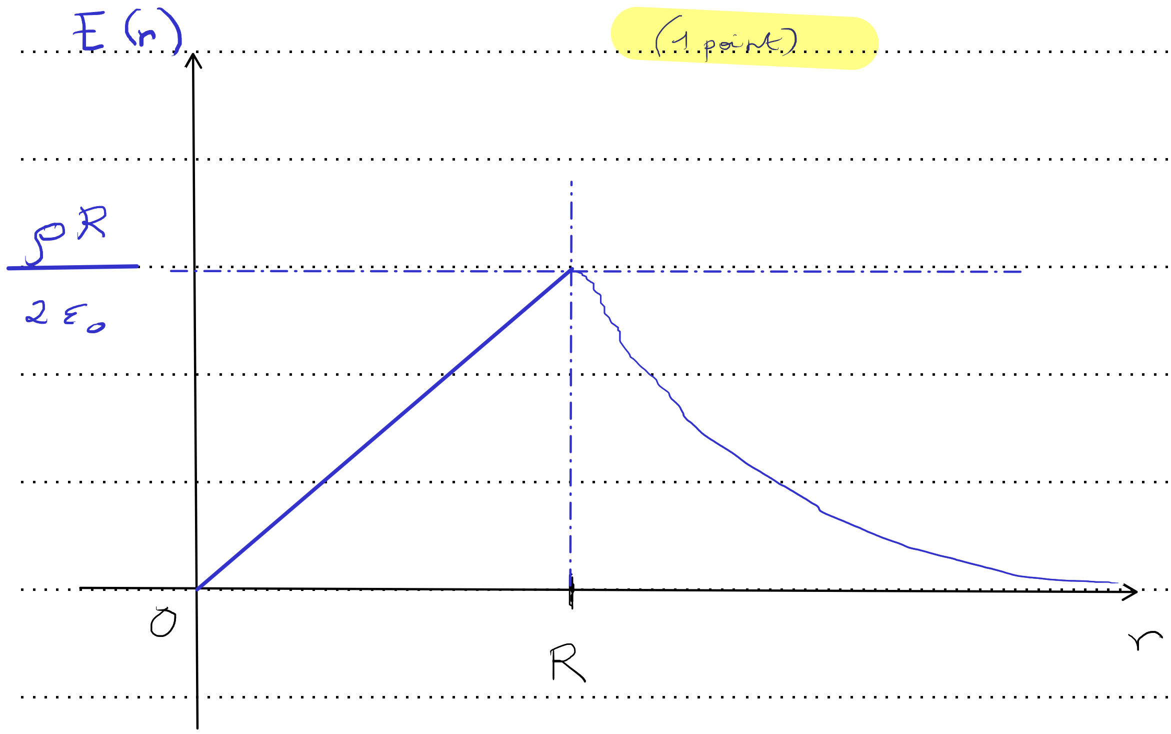
Q.14 Tracer la courbe visualisant les variations de E en fonction de la position de M, pour r variant de 0 à l'infini (et aussi en R).

□-0.5 ■1 *Réservé à l'enseignant(e)*

$$E(r \geqslant R) = \frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0 r}$$

$$E(r \leqslant R) = \frac{\rho r}{2 \varepsilon_0}$$

(1 point)



Exercice 2 - Potentiel pour une sphère (8 points)

On considère une sphère de rayon R et de centre O ayant une distribution volumique de charges de densité ρ uniforme.

Q.15 **(1 point)** Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par cette distribution est alors :
défini en tout point de l'espace, sauf à la traversée de la surface chargée de la sphère.
défini en tout point de l'espace.
défini en tout point de l'espace, sauf sur les points de la distribution.
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.16 **(1 point)** La direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par cette distribution est radiale car :
tous les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\phi})$ sont des plans de symétrie.
tous les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ sont des plans de symétrie.
tous les plans passant par O et par M sont des plans de symétrie.
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.17 **(1 point)** En utilisant le théorème de Gauss, on trouve que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ vaut :
$r < R : \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$
$r < R : \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho r}{\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$
$r < R : \overrightarrow{E} = -\dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.18 **(1 point)** En utilisant le théorème de Gauss, on trouve que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ vaut :
$r > R : \overrightarrow{E} = -\dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$
$r > R : \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho R^3}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$
$r > R : \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.19 **(1 point)** Le potentiel électrostatique V créé par cette distribution
est défini et continu en tout point de l'espace, sauf à la traversée de la surface chargée de la sphère.
est défini et continu en tout point de l'espace.
n'est pas défini sur les points où se trouve les charges.
Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.20 À partir de l'expression de $\vec{E}$, donner l'expression du potentiel électrostatique V (avec le potentiel nul à l'infini) pour $r < R$ et $r > R$.

☐-0.5 ☐-1 ■2 *Réservé à l'enseignant(e)*

Si la sphère de Gauss a un rayon $r \geq R$

$Q = \rho V$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$

$= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = -\frac{dV}{dr}$

Si la sphère de Gauss a un rayon $r \leq R$

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = -\frac{dV}{dr}$$

donc $V(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + K'$ et $V(r \leq R) = \frac{-\rho r^2}{6\varepsilon_0} + K''$ (1 point)

avec K', K'' constantes telles que : (1) V continu en $r = R$

(2) $V(r \to \infty) = 0$ car pas de charges à l'∞.

(2) $\lim_{r\to\infty} V(r \geq R) = 0 = K' \Rightarrow \boxed{K' = 0}$

(1) $V(r = R^+) = V(r = R^-) \Rightarrow \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R} = \frac{-\rho R^2}{6\varepsilon_0} + K''$

$\Rightarrow K'' = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)}_{1/2} = \boxed{\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$

$$\boxed{V(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \quad \text{et} \quad V(r \leq R) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)}$$

(1 point)

Q.21 Tracer la courbe visualisant les variations de V en fonction de la position de M, pour r variant de 0 à l'infini (et aussi en R).

☐-0.5 ■1 *Réservé à l'enseignant(e)*

$V(r \geq R) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$ et $V(r \leq R) = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)$

(1 point)