CC2

Électromagnétisme

02 Décembre 2021 — PréIng2

Durée : 1h30 (2h en cas de tiers temps)

Consignes :

- *les documents sont interdits ;*
- *tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même les montres connectées sont interdits ;*
- *les déplacements et les échanges sont interdits.*

Instructions pour répondre :

- *vérifier que le sujet est composé de 8 pages ;*
- *veillez à ne pas dégrafer les feuilles ;*
- *chaque question ne comporte qu'une seule réponse vraie ;*
- *remplir complétement en noir la case correspondant à la bonne réponse ;*
- *utiliser un crayon à papier pour colorier les cases et faire les schémas ;*
- *une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée.*

Identification

Veuillez coder votre numéro d'étudiant à gauche, et compléter la case à droite. Ce numéro se trouve après votre date de naissance sur votre carte étudiante. La première colonne code le premier chiffre, ...

☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9 ☐9

Nom et prénom :

....

....

Groupe :

....

Questions de cours (3 points)

(0,5pt) **Q.1** La circulation C du champ électrostatique $\vec{E}$ est donnée par :

☐ $C = \iint_S \vec{E}\,.\,\vec{dS}$

☐ $C = \iiint_V \vec{E}\,.\,\vec{dV}$

■ $C = \int_A^B \vec{E}\,.\,\vec{dl}$

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

(0,5pt) **Q.2** Puisque le champ électrostatique $\vec{E}$ est à circulation conservative, on définit la fonction potentiel électrostatique par :

■ $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

☐ $\vec{E} = \overrightarrow{grad}V$

☐ $\vec{V} = \overrightarrow{grad}E$

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

(0,5pt) **Q.3** Le théorème de Gauss énonce que le flux Φ du champ $\vec{E}$, à travers une surface fermée S est relié à la charge intérieure q_{int}, contenue dans le volume V délimité par la surface S par :

☐
$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = q_{int}$$

☐
$$\Phi = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{dV} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

■
$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

(0,5pt) **Q.4** La variation dV d'un champ scalaire $V(M)$ est donnée par $dV(M) = \overrightarrow{grad}V \cdot \overrightarrow{dOM}$, où $\overrightarrow{grad}V$ est le gradient du champ scalaire V. Le vecteur gradient $\overrightarrow{grad}V$ est donc :

☐ tangent à la surface équipotentielle passant par M de la fonction scalaire $V(M)$.

☐ un vecteur directeur de la surface équipotentielle passant par M de la fonction scalaire $V(M)$.

■ normal à la surface équipotentielle passant par M de la fonction scalaire $V(M)$.

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

(0,5pt) **Q.5** Dans le cas d'une distribution volumique de charges, le potentiel électrique est :

☐ défini sur la surface chargée et il n'est pas continu à la traversée de la surface.

☐ n'est pas défini sur les points où se trouvent les charges.

■ défini et continu en tout point de l'espace.

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

(0,5pt) **Q.6** L'énergie potentielle d'interaction entre une charge q et un champ électrostatique $\vec{E}$ créant le potentiel V est :

■ $E_p = qV + K$

☐ $E_p = qE + K$

☐ $E_p = -qV + K$

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Exercice 1 - Cylindre chargé en volume (9 points)

On considère une distribution volumique uniforme de charges, répartie dans le volume d'un cylindre plein de rayon R et de longueur infinie. La densité volumique de charges ρ est constante et positive.

Q.7 (1 point) Dans la base de coordonnées cylindriques, le vecteur champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par cette distribution est :
- ☐ dirigé selon (Oz).
- ☐ de direction quelconque.
- ■ radiale.
- ☐ appartient aux plans d'antisymétrie.
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.8 (1 point) Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(r)$, à la distance r de l'axe du cylindre, par application du théorème de Gauss, dans le cas où le point M est à l'*extérieur* du cylindre :
- ■ $E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$
- ☐ $E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$
- ☐ $E(r) = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0 r}$
- ☐ $E(r) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0 r}$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.9 (1 point) Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(r)$, à la distance r de l'axe du cylindre, par application du théorème de Gauss, dans le cas où le point M est à l'*intérieur* du cylindre :
- ☐ $E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$
- ☐ $E(r) = \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0}$
- ■ $E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$
- ☐ $E(r) = \frac{\rho r}{\epsilon_0}$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.10 (1 point) Le potentiel électrostatique, en tout point M, à l'*intérieur* du cylindre a pour expression :
- ☐ $V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + constante$
- ☐ $V(r) = \frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + constante$
- ■ $V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + constante$
- ☐ $V(r) = \frac{\rho r^2}{\epsilon_0} + constante$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.11 (1 point) Le potentiel électrostatique, en tout point M, à l'*extérieur* du cylindre a pour expression :
- ☐ $V(r) = -\frac{\rho R^2}{\epsilon_0} \ln r + constante$
- ■ $V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + constante$
- ☐ $V(r) = \frac{\rho R^2}{\epsilon_0 r} + constante$
- ☐ $V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + constante$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.12 (1 point) Si on fixe $V(r = R) = 0$, le potentiel électrostatique, en tout point M, à l'*intérieur* du cylindre est tel que la constante vaut :
- ☐ $constante = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$
- ☐ $constante = -\frac{\rho R^2}{\epsilon_0}$
- ■ $constante = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$
- ☐ $constante = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.13 Retrouver l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ par application du théorème de Gauss, à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

☐-0.5 ☐-1 ■2 *Réservé à l'enseignant(e)*

⓪ Définition et continuité : si distribution volumique des charges ⇒ $\vec{E}$ défini et continu sur tout l'espace.

① coordonnées cylindriques : $(O; (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z))$

$\vec{d\ell} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix}$ $\quad \vec{dS} = \begin{vmatrix} r\,d\theta\,dz \\ dr\,dz \\ r\,dr\,d\theta \end{vmatrix}$ (dS_z, dS_r, dS_θ)

② Invariances : * si on tourne la distribution de charge de θ ⇒ reste inchangée : $\vec{E}(r, \cancel{\theta}, z)$

* cylindre infini selon l'axe Oz ⇒ si on translate la distrib. de charge selon Oz ⇒ reste inchangée → invariance suivant z. $\vec{E}(r, \theta, \cancel{z})$

③ Symétries :

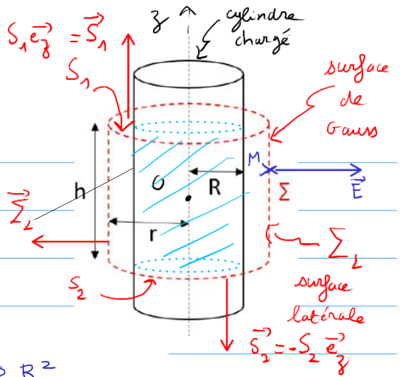
- Tout plan P_1, passant par M, défini par $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, est un plan de symétrie ⇒ $\vec{E} \in P_1$
- Tout plan P_2, passant par M, défini par $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est " " " ⇒ $\vec{E} \in P$

$\vec{E}$ selon $\vec{e}_r$ direction commune aux 2 plans de symétrie.

$$\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r}$$

(0,5 point)

④ Théorème de Gauss : $\boxed{\Phi = \oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$



$\Phi = 2\pi r h\,E(r)$ ⇒ $E(r) = \left(\dfrac{1}{2\pi r h}\right)\dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

(0,5 point)

pour le calcul de q_{int}, 2 cas possible :

$\begin{cases} r \geq R : q_{int} = Q \text{ totale sur une hauteur} & (i) \\ r \leq R : q_{int} = \text{portion de la charge du cylindre.} & (ii) \end{cases}$

(i) $r \geq R$: $q_{int} = \rho(\pi R^2 h)$ ⇒ $E(r \geq R) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$ (0,5 point)

(ii) $r \leq R$: $q_{int} = \rho(\pi r^2 h)$ ⇒ $E(r \leq R) = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ (0,5 point)

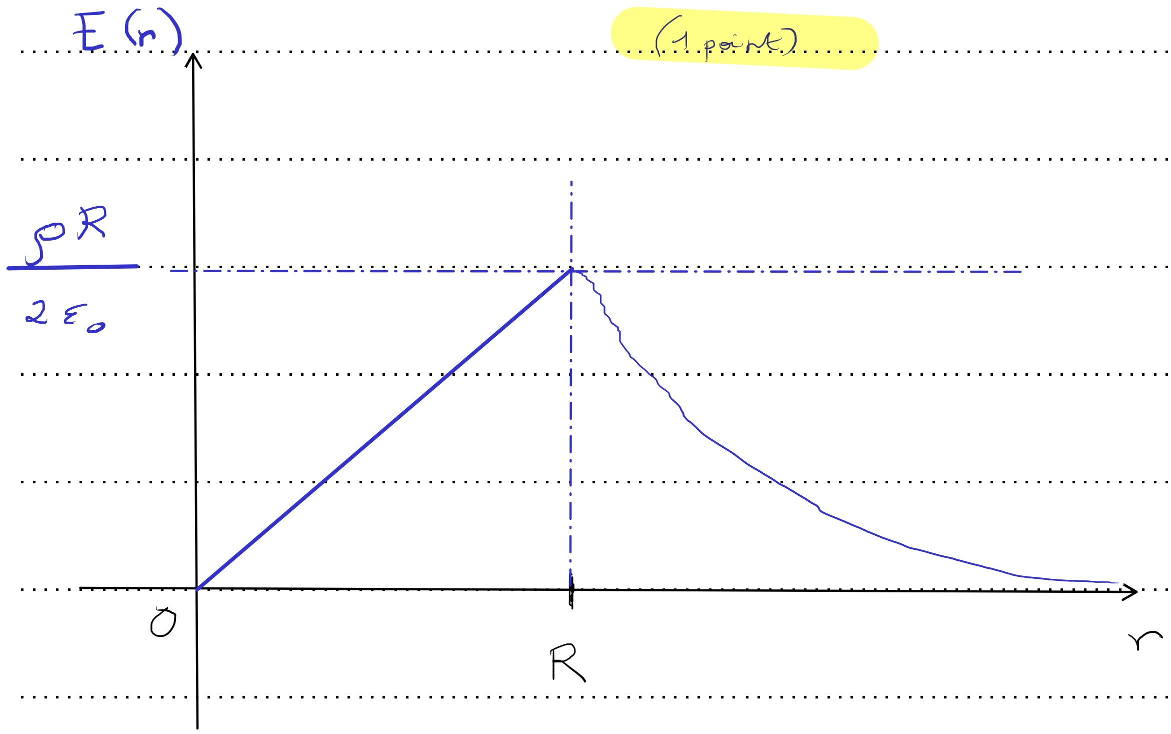
Q.14 Tracer la courbe visualisant les variations de E en fonction de la position de M, pour r variant de 0 à l'infini (et aussi en R).

□-0.5 ■1 *Réservé à l'enseignant(e)*

$$E(r \geqslant R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

$$E(r \leqslant R) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

(1 point)



Exercice 2 - Potentiel pour une sphère (8 points)

On considère une sphère de rayon R et de centre O ayant une distribution volumique de charges de densité ρ uniforme.

Q.15 (1 point) Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution est alors :

- ☐ défini en tout point de l'espace, sauf à la traversée de la surface chargée de la sphère.
- ■ défini en tout point de l'espace.
- ☐ défini en tout point de l'espace, sauf sur les points de la distribution.
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.16 (1 point) La direction du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution est radiale car :

- ☐ tous les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_\theta}, \vec{u_\phi})$ sont des plans de symétrie.
- ☐ tous les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ sont des plans de symétrie.
- ■ tous les plans passant par O et par M sont des plans de symétrie.
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.17 (1 point) En utilisant le théorème de Gauss, on trouve que le champ électrostatique $\vec{E}$ vaut :

- ■ $r < R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\vec{u_r}$
- ☐ $r < R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho r}{\epsilon_0}\vec{u_r}$
- ☐ $r < R$: $\vec{E} = -\dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\vec{u_r}$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.18 (1 point) En utilisant le théorème de Gauss, on trouve que le champ électrostatique $\vec{E}$ vaut :

- ☐ $r > R$: $\vec{E} = -\dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\vec{u_r}$
- ☐ $r > R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho R^3}{\epsilon_0 r^2}\vec{u_r}$
- ■ $r > R$: $\vec{E} = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\vec{u_r}$
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.19 (1 point) Le potentiel électrostatique V créé par cette distribution

- ☐ est défini et continu en tout point de l'espace, sauf à la traversée de la surface chargée de la sphère.
- ■ est défini et continu en tout point de l'espace.
- ☐ n'est pas défini sur les points où se trouve les charges.
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Q.20 À partir de l'expression de $\vec{E}$, donner l'expression du potentiel électrostatique V (avec le potentiel nul à l'infini) pour $r < R$ et $r > R$.

☐-0.5 ☐-1 ■2 *Réservé à l'enseignant(e)*

Si la sphère de Gauss a un rayon $r \geq R$

$Q = \rho V$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = -\frac{dV}{dr}$$

Si la sphère de Gauss a un rayon $r \leq R$

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = -\frac{dV}{dr}$$

donc $V(r \geq R) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + K'$ et $V(r \leq R) = \dfrac{-\rho r^2}{6\varepsilon_0} + K''$ (1 point)

avec K', K'' constantes telles que : (1) V continu en $r = R$

(2) $V(r \to \infty) = 0$ car pas de charges à l'∞.

(2) $\lim\limits_{r \to \infty} V(r \geq R) = 0 = K' \Rightarrow \boxed{K' = 0}$

(1) $V(r = R^+) = V(r = R^-) \Rightarrow \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R} = \dfrac{-\rho R^2}{6\varepsilon_0} + K''$

$\Rightarrow K'' = \dfrac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\underbrace{\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\right)}_{1/2} = \boxed{\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$

$$\boxed{V(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \quad \text{et} \quad V(r \leq R) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)}$$ (1 point)

Q.21 Tracer la courbe visualisant les variations de V en fonction de la position de M, pour r variant de 0 à l'infini (et aussi en R).

☐-0.5 ■1 *Réservé à l'enseignant(e)*

$V(r \geq R) = \dfrac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r}$ et $V(r \leq R) = \dfrac{\rho}{6 \varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right)$

(1 point)