CC1

Électromagnétisme

27 Octobre 2022 — PréIng2

Durée : 1h30 (2h en cas de tiers temps)

Sont interdits :

— les documents ;

— tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même que les montres connectées ;

— les déplacements et les échanges.

Consignes :

1. Vérifiez que le sujet est composé de 12 pages et 20 questions ;
2. Seules les dernières feuilles doivent être rendues ;
3. Les questions à rédiger, sur les dernières feuilles, sont indiquées par une icône ♣ ;
4. Remplir complètement au stylo noir la case correspondant à la bonne réponse ;
5. Complétez avec vos nom, prénom et groupe cette dernière feuille dès le début officiel de l'épreuve ;
6. Chaque question ne comporte qu'une seule réponse ;
7. Il n'y a pas de point négatif pour une mauvaise réponse ;
8. Une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée.

Le barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours (5 points)

Question 1 **(0.5 point)** Pour une distribution surfacique de charges, le potentiel électrique V est :

■ défini et continu en tout point de l'espace.
[B] défini sur la surface chargée et il n'est pas continu à la traversée de la surface.
[C] n'est pas défini sur les points où se trouvent les charges.
[D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 **(0.5 point)** Le *volume élémentaire en coordonnées cylindriques* s'écrit :

[A] $dV = r^2\ dr\ d\theta\ dz$
■ $dV = r\ dr\ d\theta\ dz$
[C] $dV = r^2\ \sin\theta\ dr\ d\theta\ dz$
[D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 **(1 point)** La force $\overrightarrow{F}_{1/2}$ exercée par la charge ponctuelle q_1 sur la charge ponctuelle q_2, située à la distance r_{12} vaut :

[A] $\overrightarrow{F}_{1/2} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{q_1q_2}{r_{12}^3}\right)\overrightarrow{u}_{1\to2}$
[B] $\overrightarrow{F}_{2/1} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{q_1q_2}{r_{12}^2}\right)\overrightarrow{u}_{1\to2}$
■ $\overrightarrow{F}_{1/2} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{q_1q_2}{r_{12}^2}\right)\overrightarrow{u}_{1\to2}$
[D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 **(1 point)** Soient les charges q' en M et q en P, le champ électrostatique en M s'écrit :

[A] $\overrightarrow{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{(PM)^2}\overrightarrow{PM}$
[B] $\overrightarrow{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{(PM)^3}\overrightarrow{PM}$
■ $\overrightarrow{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{(PM)^3}\overrightarrow{PM}$
[D] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 **(0.5 point)** Puisque le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ est à circulation conservative, on définit la fonction potentiel électrostatique par :

- A $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad}E$
- ■ $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$
- C $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{grad}V$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 **(1 point)** En étudiant les plans de *symétrie pour la distribution des charges*, on trouve que

- ■ le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en M est contenu dans tout plan Π de symétrie, passant par M.
- B la direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en M est celle de la droite orthogonale à un plan Π de symétrie, passant par M.
- C la direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en M est celle de la droite intersection d'au moins deux plans d'anti-symétrie, passant par M.
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

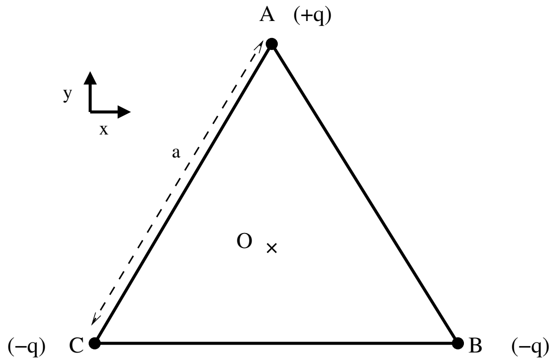
Question 7 **(0.5 point)** Le théorème de Gauss énonce que le flux Φ du champ $\overrightarrow{E}$, à travers une surface fermée S est relié à la charge intérieure q_{int}, contenue dans le volume V délimité par la surface S par :

- ■
$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$
- B
$$\Phi = \iiint_V \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dV} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$
- C
$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = q_{int}$$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Champ créé par 3 charges ponctuelles (7 points)

Trois charges ponctuelles $+q$ (située en A), $-q$ (située en B) et $-q$ (située en C) sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a (cf. figure).

On va chercher à calculer le champ électrostatique $\vec{E}(O)$ créé au centre O de ce triangle équilatéral par ces trois charges ponctuelles.



Question 8 **(1 point)** L'expression littérale du champ électrique total $\vec{E}(O)$ dû aux trois charges s'écrit :

A $\vec{E}(O) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{\vec{AO}}{\|\vec{AO}\|^3} + \dfrac{\vec{BO}}{\|\vec{BO}\|^3} + \dfrac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|^3}\right]$

B $\vec{E}(O) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{\vec{AO}}{\|\vec{AO}\|^2} - \dfrac{\vec{BO}}{\|\vec{BO}\|^2} + \dfrac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|^2}\right]$

C $\vec{E}(O) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{\vec{AO}}{\|\vec{AO}\|^2} + \dfrac{\vec{BO}}{\|\vec{BO}\|^2} - \dfrac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|^2}\right]$

■ $\vec{E}(O) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{\vec{AO}}{\|\vec{AO}\|^3} - \dfrac{\vec{BO}}{\|\vec{BO}\|^3} - \dfrac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|^3}\right]$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 **(1 point)** Retrouver l'expression de la distance $\|\vec{AO}\|$ en fonction de a. On utilisera les propriétés du triangle équilatéral.

A $\|\vec{AO}\| = \dfrac{a}{2}$

B $\|\vec{AO}\| = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

■ $\|\vec{AO}\| = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

D $\|\vec{AO}\| = \dfrac{a}{3}$

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 **(2 points)** En déduire que le champ électrique total $\vec{E}(O)$ vaut :

A $\vec{E}(O) = -\dfrac{3q}{2\pi\epsilon_0 a^3}\vec{u}_y$

B $\vec{E}(O) = -\dfrac{q}{\pi\epsilon_0 a^2}\vec{u}_y$

C $\vec{E}(O) = \dfrac{3q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\vec{u}_y$

■ $\vec{E}(O) = -\dfrac{3q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\vec{u}_y$

E $\vec{E}(O) = \dfrac{q}{\pi\epsilon_0 a^2}\vec{u}_y$

F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 ♣ **(3 points)** Détailler les calculs permettant d'obtenir l'expression du champ électrique total $\vec{E}(O)$.

Sphère chargée uniformément en surface (6 points)

On considère une sphère de rayon R et de centre O ayant une distribution surfacique de charges de densité σ uniforme.

Question 12 **(1 point)** Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par cette distribution est alors :

- A continu en tout point de l'espace.
- ■ continu en tout point de l'espace sauf à la traversée de la surface chargée de la sphère.
- C continu en tout point de l'espace, sauf sur les charges.
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 **(1 point)** La direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$, au point M, créé par cette distribution est radiale car :

- A tous les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\phi})$ sont des plans de symétrie.
- ■ tous les plans passant par O et par M sont des plans de symétrie.
- C tous les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ sont des plans de symétrie.
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 **(1 point)** En utilisant le théorème de Gauss, on trouve que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ vaut pour $r < R$:

- A $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$
- B $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$
- ■ $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 **(1 point)** En utilisant le théorème de Gauss, on trouve que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ vaut pour $r > R$:

- ■ $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$
- B $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$
- C $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$
- D *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 16 ♣ **(2 points)** Donner l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ pour $r < R$ et pour $r > R$, en détaillant.

Plan infini uniformément chargé (6 points)

On considère un plan infini uniformément chargé en surface , de densité σ, séparant l'espace en deux demi-espace $z < 0$ et $z > 0$. .

Question 17 ♣ **(1 point)** Donner les invariances du champ électrique $\overrightarrow{E}$, en détaillant.

Question 18 ♣ **(2 points)** Donner les symétries du champ électrique $\overrightarrow{E}$, en détaillant.

Question 19 **(1 point)** On choisit comme surface de Gauss fermée celle d'un cylindre d'axe Oz et de rayon r. Alors le flux du champ éléctrique $\Phi(\overrightarrow{E})$ vaut :

- [A] $\Phi(\overrightarrow{E}) = \dfrac{\sigma 2\pi r^2}{\epsilon_0}$
- [B] $\Phi(\overrightarrow{E}) = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$
- ■ $\Phi(\overrightarrow{E}) = \dfrac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}$
- [D] $\Phi(\overrightarrow{E}) = \dfrac{\sigma \pi r^2}{2\epsilon_0}$
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 20 ♣ **(2 points)** Donner l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$, en détaillant.

Nom et prénom :

....

....

Groupe :

Les réponses ne doivent être apportées que sur cette feuille.
La copie ne sera corrigée que si :

- **elle comporte vos nom, prénom et groupe ;**
- **les cases sont complètement coloriées avec un stylo noir ;**
- **la feuille réponse ne comporte pas de ratures.**

Question 1 : ■ B C D
Question 2 : A ■ C D
Question 3 : A B ■ D
Question 4 : A B ■ D
Question 5 : A ■ C D
Question 6 : ■ B C D
Question 7 : ■ B C D
Question 8 : A B C ■ E
Question 9 : A B ■ D E
Question 10 : A B C ■ E F
Question 12 : A ■ C D
Question 13 : A ■ C D
Question 14 : A B ■ D
Question 15 : ■ B C D
Question 19 : A B ■ D E

En points

Question 11 : Champ créé par 3 charges ponctuelles

[redacted] *Réservé à l'enseignant(e)*

Question 11 ♣ (3 points) Détailler les calculs permettant d'obtenir l'expression du champ électrique total $\vec{E}(O)$.

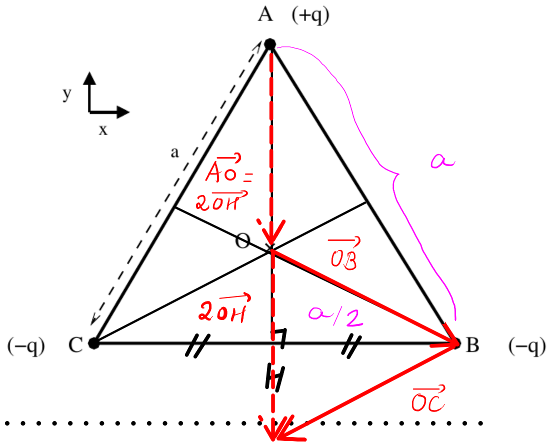
1 — $\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{AO}}{\|\vec{AO}\|^3} - \frac{\vec{BO}}{\|\vec{BO}\|^3} - \frac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|^3}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\|AO\|^3}\left[\vec{AO} + \underbrace{\vec{OB} + \vec{OC}}_{2\,\vec{OH}}\right]$

0,5 — car le triangle ABC est équilatéral donc : $\|\vec{AO}\| = \|\vec{BO}\| = \|\vec{CO}\|$

0,5 — et $AO = \frac{2}{3} AH$ avec

$(AH)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow (AH)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$



0,5 — $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OH} = \vec{AO}$ car cf schéma :

donc

$\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)^3 \left[\underbrace{\vec{AO} + \vec{AO}}_{2\vec{OA} = -2\frac{a}{\sqrt{3}}\vec{u}_y}\right]$

0,5 — $\Rightarrow \boxed{\vec{E}(O) = \frac{q}{\cancel{4}_{2}\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{a^{\cancel{3}\,2}}\right)\left(-\cancel{2}\frac{\cancel{a}}{\cancel{\sqrt{3}}}\right)\vec{u}_y} = \boxed{\frac{-3q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u}_y}$

Question 16 : Sphère chargée uniformément en surface Réservé à l'enseignant(e)

Question 16 ♣ (2 points) Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$ pour $r < R$ et pour $r > R$, en détaillant.

⓪ Définition et continuité : distribution surfacique $\Rightarrow \vec{E}$ défini et continu sur tout l'espace sauf à la traversée de la surface.

0,5

① coord. sphériques : $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

② $\vec{E}(r,\theta,\varphi)$ mais invariance par rotation selon θ et φ

③ Symétrie : tout plan P passant par M et centre O $\left[(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta) \text{ et } (M,\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi)\right]$ = plan de symétrie

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r \quad \text{radial}$$

0,5

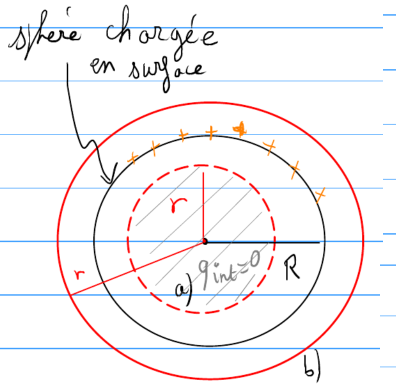
④ Théorème de Gauss :

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oint\!\!\!\oint_{S_G} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

S_G : sphère de centre O et de rayon r

a) $\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \oint\!\!\!\oint_{S_G} E(r)\,dS_r = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} E(r)\,r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = r^2 E(r) \underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$

à r fixé



$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r)$$

S_G : sphère de rayon r en rouge

q_{int} : a) $r < R$: $q_{int} = 0$

b) $r > R$: $q_{int} = Q = 4\pi R^2 \sigma$

r>R

r<R

2x0,5

a) $E(r<R) = 0$

b) $E(r>R) = \dfrac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)\left(\dfrac{R^2}{r^2}\right)$

Question 17 : Plan infini uniformément chargé

Réservé à l'enseignant(e)

Question 17 ♣ **(1 point)** Donner les invariances du champ électrique $\vec{E}$, en détaillant.

1

① système de coordonnées : coord. cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ $\vec{E}(r,\theta,z)$

② Invariances : distribut. unif. et plan ∞ $\left\{ \begin{array}{l} \text{invariance par rotation autour de } Oz \\ \text{〃 〃 translation selon } \vec{e}_r \end{array} \right.$ $\Longrightarrow$ $\vec{E}(z)$

Question 18 :

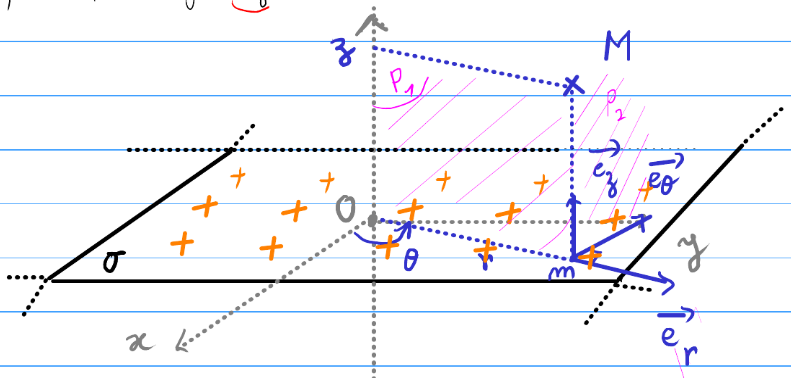
Réservé à l'enseignant(e)

Question 18 ♣ **(2 points)** Donner les symétries du champ électrique $\vec{E}$, en détaillant.

③ Symétries :

1

plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ = P_1 = plan de symétrie
plan $(M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ = P_2 = 〃 〃 〃
$\Big\}$ $\vec{E} \in P_1$ et P_2 $\quad$ $\vec{E} = E\,\vec{e}_z$



$\boxed{\vec{E} = E(z)\,\vec{e}_z}$

1

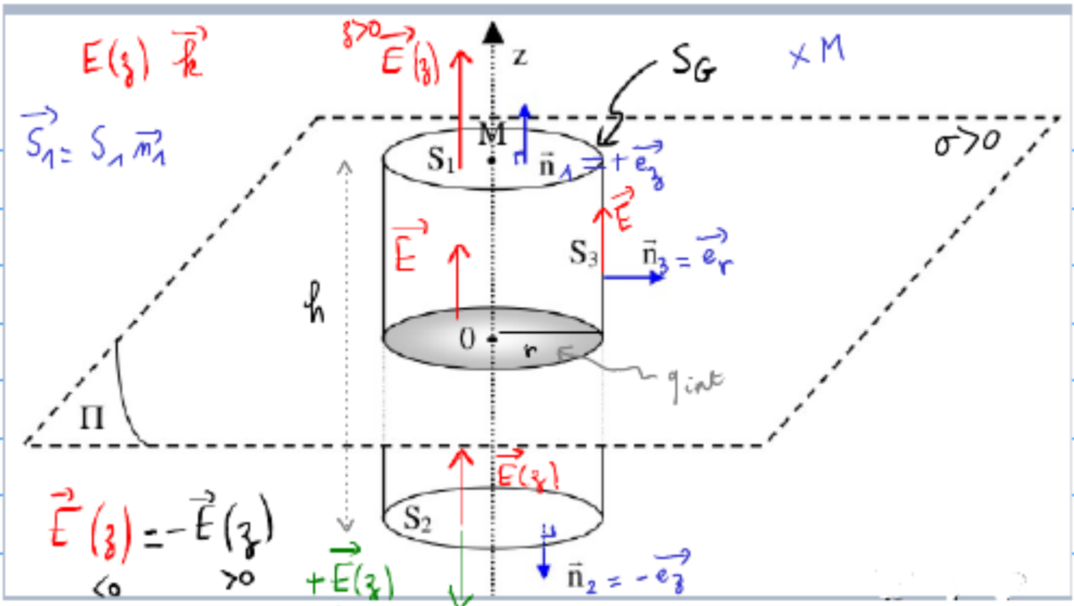
+ plan chargé $(z=0)$ = plan de symétrie $\Rightarrow$ $\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$

↳ (1 pt à la question 18 et/ou 20)

Question 20 :

Réservé à l'enseignant(e)

Question 20 ♣ **(2 points)** Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$, en détaillant.



4 Théorème de Gauss : S_G : cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r avec $S_G = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{avec } \vec{E} = E(z)\,\vec{e_z} \text{ ici}$$

plan $(z=0, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ = plan de symétrie pour $\vec{E}$ donc $\vec{E}(z>0) = -\vec{E}(z<0)$

0,5

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E}(z) \cdot \vec{dS} = \underbrace{\iint_{S_1} E(z)\vec{e_z} \cdot dS_1 \vec{n_1}}_{\Phi_1} + \underbrace{\iint_{S_2} E(z)\vec{e_z} \cdot dS_2 \vec{n_2}}_{\Phi_2} + \iint_{S_3} E(z)\underbrace{\vec{e_z} \cdot \vec{n_3}}_{=0} dS_3 \ldots$$

0,5

$$\Phi(\vec{E}) = 2\,\Phi_1(\vec{E}) = 2 \cdot E(z>0) \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r 2\pi \ldots \Rightarrow E(z>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

0,5

$$q_{int} = \iint_{S} dq = \iint_{S} \sigma\, dS = \sigma S = \sigma \pi r^2 \ldots$$

sur le plan chargé

σ constant

0,5

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E(z>0)\,\vec{e_z} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{e_z} \\ E(z<0)\,\vec{e_z} = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{e_z} \end{array} \right.$$

Feuille supplémentaire - (indiquer le numéro de la question rédigée)