Analyse dans $\mathbb{R}^n$

Elian Masnada[1,2]

11 septembre 2020

1. **J'encourage les élèves à me faire part de leurs remarques par email à l'adresse elian.masnada@cyu.fr afin de m'aider à améliorer ce cours.**
2. En partie inspiré du polycopié de Jean-Michel Masereel.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et objectifs du cours

En Analyse 1ère année, vous avez très longuement étudié l'ensemble des réels et les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Malheureusement, que ce soit en physique, en économie, en finance ou encore en sciences sociales, la description des phénomènes, issus de ces domaines, fait souvent appel à des fonctions plus complexes : des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (où $n, p \in \mathbb{N}$ tels que, au moins, soit n soit p soit un entier supérieur à 1), c'est à dire des fonctions (vectorielles si $n > 1$) de plusieurs variables (si $p > 1$). Par exemple, en thermodynamique, la description de l'énergie interne U d'un système se fait par l'intermédiaire de la température et de la pression. Ainsi, il faut introduire la fonction $U(T, P)$ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ pour étudier l'évolution de ce système. Il s'agit d'une fonction sclaire à 2 variables. De même en électromagnétisme, la connaissance d'un système passe par la donnée des champs vectoriels $\vec{E}$ et $\vec{B}$ qui sont, tous deux, des applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, en toute généralité. Il faut donc mieux appréhender des espaces de plus grandes dimensions que $\mathbb{R}$ (comme $\mathbb{R}^n$) et les fonctions de plusieurs variables. Ainsi, l'objectif du cours d'Analyse dans $\mathbb{R}^n$ est d'étendre tous les concepts que vous avez étudiés en Analyse 1ère année afin de pouvoir manipuler des fonctions de plusieurs variables, capitales dans un grand nombre de domaines.

Rappelons ici les principales notions que vous avez abordées en 1ère année et qui seront généralisées dans ce cours d'Analyse dans $\mathbb{R}^n$:

1. Tout d'abord la topologie de base (ouvert, fermé, compact,...) qui vous a été introduite dans $\mathbb{R}$ et qui sera donc étendu en toute généralité à

des espaces vectoriels normés et en particulier à $\mathbb{R}^n$. On définira dans cette partie les notions

(a) de norme et de distance
(b) d'espace vectoriel normé
(c) de boule ouverte et de boule fermée
(d) d'ouvert, de fermé et de compact
(e) et enfin, d'intérieur et d'adhérent

Cette partie nous permettra d'introduire rigoureusement tous les concepts qui suivent.

2. Nous allons généraliser les notions associées aux suites d'éléments de $\mathbb{R}$. Nous introduirons en effet dans ce cours des suites d'éléments d'espaces vectoriels normés, afin de définir, dans ce cadre, les notions
   (a) de convergence
   (b) de suites extraites et de valeurs d'adhérence
   (c) de suite de Cauchy
   (d) et enfin, d'espace complet et de Banach

3. les notions de limite, de continuité, de dérivée et de dérivabilité pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Encore une fois tout cela sera étendu aux applications définies sur un espace vectoriel normé quelconque à valeurs dans un autre espace vectoriel normé quelconque. Ainsi, nous introduirons les notions
   (a) de limite
   (b) de continuité et de continuité uniforme
   (c) de dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre supérieur
   (d) de différentiabilité
   (e) de classe $\mathcal{C}^k$

4. et enfin nous généraliserons les équations différentielles (qui sont des équations fonctionnelles dont l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) en introduisant les équations aux dérivées partielles (équations fonctionnelles dont l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$). Vous

avez déjà rencontré ce type d'équations en physique comme en électromagnétisme avec l'équation de Gauss par exemple

$$\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

où $\frac{\partial}{\partial x}$ signifie dérivée partielle par rapport x. Il s'agit ici d'une "équation différentielle" portant sur une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 2

Espace Vectoriel Normé

2.1 Objectifs du chapitre

Le but de ce cours étant d'apprendre à manipuler les fonctions de plusieurs variables (typiquement des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ mais plus généralement d'un espace vectoriel quelconque à un autre), nous devons tout d'abord nous pencher sur la structure même des espaces vectoriels. En effet, lorsque dans la suite du cours, nous allons manipuler des fonctions de plusieurs vairables, nous devrons manipuler des limites (à la fois pour définir la notion de continuité et la notion de dérivées partielles). Or, vous savez que pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l est la limite en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon \qquad (2.1)$$

$|x-a|$ se comprend intuitivement comme la distance entre x et a. De même, $|f(x) - l|$ est la distance entre $f(x)$ et l. Pour généraliser cela au cas d'une fonction f allant d'un espace vectoriel quelconque à un autre, il faudra donc généraliser (2.1) ce qui nécessitera de définir la notion de distance et de norme dans un espace vectoriel.

De plus, nous verrons que les propriétés que nous allons définir sur les fonctions de plusieurs variables nécessitent que les ensembles sur lesquels les fonctions sont définies remplissent certaines conditions topologiques comme ouvert, fermé, compact...

Et enfin, nous définirons des suites d'éléments d'espace vectoriel qui seront utilisés dans le chapitre suivant pour caractériser la limite et à la continuité de fonctions de plusieurs variables.

Mots clefs :

Topologie : norme et distance, espace vectoriel normé, boule ouverte et boule fermée, ouvert, fermé et compact, intérieur et d'adhérent

Suites : convergence, suites extraites et de valeurs d'adhérence, suite de Cauchy, espace complet et de Banach

2.2 Eléments de topologie dans $\mathbb{R}^n$

2.2.1 Norme & Distance

Définition 1 : (norme)
Soit E un espace vectoriel. Soit $\|\cdot\|$ une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$. $\|\cdot\|$ est une norme sur E, si, et seulement si, l'application vérifie les 3 propriétés suivantes

1. $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ (séparation)
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (absolue homogénéité)
3. $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

On dira alors que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (EVN).

Remarque 1 :
On peut combiner les deux premières propriétés de la définition pour montrer que $x = 0_E \Longrightarrow \|x\| = 0$. En effet

$$\|0_E\| = \|0 \times 0_E\| = 0 \times \|0_E\| = 0$$

Remarque 2 :
la norme du vecteur $x \in E$ représente évidemment la taille du vecteur x, mais comme nous allons le montrer par la suite, il peut exister sur un espace vectoriel donné, plusieurs normes. Vous connaissez déjà une norme dans le cas des vecteurs appartenant à $\mathbb{R}^3$: soit $\vec{X} = (x, y, z)$ alors

$$\left\|\vec{X}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

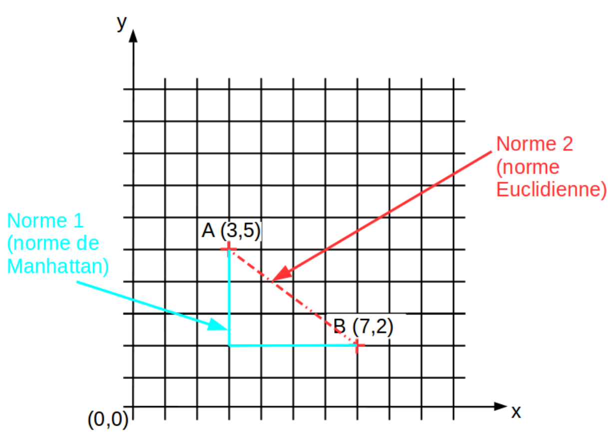
Donnons des exemples de norme sur $E = \mathbb{R}^n$:
Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors, les trois applications suivantes sont des normes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (2.2)$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

Remarque 1 :
La norme $\|\cdot\|_2$ est appelée norme Euclidienne et correspond à la généralisation à un nombre quelconque de dimensions de la norme que vous connaissez déjà dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque 2 :
Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, les 3 normes sont alors identiques : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|x\|_1 = \|x\|_2 = \|x\|_\infty = |x|$.

Remarque 3 :
En dimension 2, on peut facilement s'apercevoir que ces normes correspondent à "des tailles de vecteur" dans des situations différentes (voir le schéma ci-dessous) :



On voit ainsi que la norme Euclidienne correspond à la taille du vecteur $\overrightarrow{AB}$

à vol d'oiseau tandis que la norme 1 correspond à la taille du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en suivant le quadrillage [1].

Remarque 4 :
Montrons par exemple que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, nous devons vérifier les trois points de la définition 1 :

1. Vérification de la 1ère propriété :
   $\|x\|_1 = 0 \Longrightarrow \forall i,\ x_i = 0$. On voit donc que $\|x\|_1 = 0 \Longrightarrow x = 0_E$.
2. Vérification de la 2ème propriétés :
   Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$. Alors
   $$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\,\|x\|_1$$
3. Vérification de la 3ème propriétés :
   Soient $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Alors $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$. Donc
   $$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Finalement $\|\cdot\|_1$ est bien une norme. Les deux autres normes seront étudiées en TD.

Donnons des exemples de norme sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, où E correspond alors à l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit f une fonction appartenant à E. Alors les trois normes les plus souvent utilisées sont

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}$$
$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} (|f(x)|) \tag{2.3}$$

1. Aux USA, on appelle aussi la norme 2, la norme de Manhattan. En effet, on voit que cette norme correspond à la distance (même si nous n'avons pas encore déterminé le lien entre norme et distance) que l'on doit parcourir entre deux points dans une ville très quadrillée comme Manhattan.

Exemple :
L'application suivante est-elle une norme ?

$$N \quad : \quad \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & N(x,y) = |4x+7y| \end{array}$$

Pour répondre à cette question, nous devons vérifier si N vérifie les trois propriétés de la définition 1. Commençons par la première.

Si $N(x,y) = 0$ alors $|4x+7y| = 0 \iff x = -\frac{7}{4}y$. On déduit donc que la 1ère propriété n'est pas vérifiée puisque $N(x,y) = 0$ n'implique pas $(x = 0, y = 0)$. Finalement N n'est pas une norme.

Quelques propriétés des normes

Propriété 1 : (Positivité)

La norme est définie positive : $\forall x,\ \|x\| \geq 0$.

démonstration :
$\forall x \in E$, $0 = \|0_E\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$. Donc $\|x\| \geq 0$.

Propriété 2 :

Pour la norme euclidienne : $\forall x, y \in E,\ \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff x = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Admis car cela fera l'objet d'une démonstration dans le cours d'algèbre bilinéaire.

Remarque :
Cela n'est pas le cas pour d'autres normes (les normes qui ne sont pas issues d'un produit scalaire comme vous le verrez dans le cours d'algèbre bilinéaire). Illustrons cela sur l'EVN $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Considérons alors X et Y tels que

$$\begin{cases} X = (1,1) \\ Y = (1,0) \end{cases} \implies X + Y = (2,1)$$

On a donc

$$\|x+y\|_\infty = \max(2,1) = 2 \qquad \|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$$

on voit donc

$$\|x+y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

alors que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ X \neq \lambda Y$.

Propriété 3 : (2nd inégalité triangulaire)

$$\forall x, y \in (E, \|\cdot\|),\ \|x-y\| \geq |\,\|x\| - \|y\|\,| \tag{2.4}$$

démonstration :

$$\begin{aligned} \forall x, y \quad & \|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \\ & \Longrightarrow \|x-y\| \geq \|x\| - \|y\| \\ & \|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| \\ & \Longrightarrow \|x-y\| \geq \|y\| - \|x\| \end{aligned} \tag{2.5}$$

On voit donc que

$$\|x-y\| \geq \max(\|y\| - \|x\|, \|x\| - \|y\|) = |\,\|x\| - \|y\|\,|$$

Définition 2 : (normes équivalentes)

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$. Alors, on dit que $\|\cdot\|_a$ est équivalent à $\|\cdot\|_b$ si, et seulement si, il existe $\alpha,\ \beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a$$

Cette équivalence est bien une relation d'ordre :

— Réflexivité :
  $\|\cdot\|_a$ est équivalent à $\|\cdot\|_a$. En effet,

$$\forall x \in E,\ \|x\|_a \leq \|x\|_a \leq \|x\|_a$$

— Symétrie :
Si $\|\cdot\|_a$ est équivalent à $\|\cdot\|_b$ alors $\|\cdot\|_b$ est équivalent à $\|\cdot\|_a$.

démonstration :
Considérons que $\|\cdot\|_a$ est équivalent à $\|\cdot\|_b$. Cela signifie que

$$\exists \alpha, \beta > 0 \ / \ \forall x \in E,\ \alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a$$

d'après l'inégalité de gauche (comme $\alpha > 0$) :

$$\|x\|_a \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|_b \tag{2.6}$$

d'après l'inégalité de droite (comme $\beta > 0$) :

$$\frac{1}{\beta} \|x\|_b \leq \|x\|_a \tag{2.7}$$

On a donc

$$\forall x \in E,\ \frac{1}{\beta} \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|_b$$

et donc $\|\cdot\|_b$ est équivalent à $\|\cdot\|_a$

— Transitif :

$$\begin{array}{rl} \text{Si } \|\cdot\|_a \text{ équivalent à } \|\cdot\|_b & (1) \\ \text{Si } \|\cdot\|_b \text{ équivalent à } \|\cdot\|_c & (2) \\ \text{Alors } \|\cdot\|_a \text{ équivalent à } \|\cdot\|_c & (3) \end{array}$$

Démonstration :
D'après (1) : $\exists \alpha, \beta > 0 \ / \ \forall x \in E,\ \alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a$
D'après (2) : $\exists \eta, \gamma > 0 \ / \ \forall x \in E,\ \eta \|x\|_b \leq \|x\|_c \leq \gamma \|x\|_b$
de ces deux expressions, on déduit

$$\|x\|_c \leq \gamma \|x\|_b \leq \gamma\beta \|x\|_a$$
$$\|x\|_c \geq \eta \|x\|_b \geq \eta\alpha \|x\|_a$$

Donc

$$\eta\alpha \|x\|_a \leq \|x\|_c \leq \gamma\beta \|x\|_a$$

Finalement $\|\cdot\|_a$ est équivalent à $\|\cdot\|_c$.

Théorème 1 : (Equivalence des normes)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration : admis.

De manière très intuitive, vous savez que l'on peut grâce à la norme définir la distance entre deux points. On se propose ici de définir ce qu'est une distance

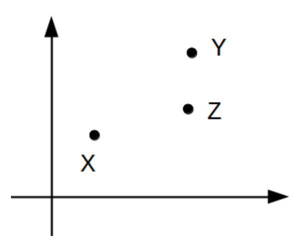
Définition 3 : (Distance)

Soit X un ensemble quelconque. L'application d, de $X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, est une distance sur X, si et seulement si, elle vérifie :

1. $\forall (X,Y) \in X^2,\ d(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow X = Y$
2. $\forall (X,Y) \in X^2,\ d(X,Y) = d(Y,X)$
3. $\forall (X,Y,Z) \in X^3,\ d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$

Remarque : en réalité les propriétés demandées sont triviales :

1. La seule façon pour que la distance entre deux points soit nulle est que les deux points soient confondus.
2. La distance est symétrique. La distance entre X et Y est la même que la distance entre Y et X.
3.



$d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$: si je passe par un autre point Z pour aller de X à Y, au mieux je ne réduis pas la distance au pire je fais un détour.

Propriété 4 : (positivité de la distance)

La distance est une application définie positive : $\forall (X,Y) \in X^2,\ d(X,Y) \geq 0$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \forall (X,Y) \in X^2,\ d(X,X) &\leq d(X,Y) + d(Y,X) \\ 0 &\leq 2d(X,Y) \\ 0 &\leq d(X,Y) \end{aligned}$$

Propriété 5 : (Distance associée à une norme)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Alors, on appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$, l'application d définie par

$$\begin{array}{rccl} d & : & E \times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & X, Y & \mapsto & d(X,Y) = \|X - Y\| \end{array}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une distance. Pour cela, on doit contrôler que cette application respecte bien les trois propriétés introduites dans la définition de la distance :

1. Si $X = Y$ alors $d(X,Y) = \|X - Y\| = \|0_E\| = 0$
   Si $d(X,Y) = 0$, alors $\|X - Y\| = 0$, ce qui implique que $X = Y$.

2. $d(X,Y) = \|X - Y\| = \|-(Y - X)\| = |-1|\,\|Y - X\| = d(Y,X)$

3. $d(X,Y) = \|X - Y\| = \|X - Z + Z - Y\| \leq \|X - Z\| + \|Z - Y\|$
   et finalement $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Y,Z)$.

Propriété 6 :

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un EVN et d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$. Alors, d vérifie

$$\forall X, Y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad d(\lambda X, \lambda Y) = |\lambda| d(X,Y)$$

Démonstration :

$$d(\lambda X, \lambda Y) = \|\lambda X - \lambda Y\| = |\lambda| \, \|X - Y\| = |\lambda| d(X, Y)$$

C'est cette propriété 6 que nous utiliserons pour montrer qu'une distance n'est pas associée à aucune norme.

Exemples de distance :

— Considérons l'EVN $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Alors, l'application

$$\begin{array}{rcccl} d & : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & (X, Y) & \mapsto & d(X, Y) = \|X - Y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{array}$$

avec $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$, est bien une distance.

— Soit E un espace vectoriel quelconque. Alors l'application suivante est une distance

$$\begin{array}{rcccl} d_0 & : & E \times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & (X, Y) & \mapsto & d_0(X, Y) = \begin{cases} 0 & \text{si } X = Y \\ 1 & \text{si } X \neq Y \end{cases} \end{array}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une distance.

a) Si $X = Y$ alors $d_0(X, Y) = 0$ par construction.
Si $d_0(X, Y) = 0$ alors $X = Y$.

b) d_0 est trivialement symétrique.

c) vérifions si $\forall X, Y, Z, \; d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Y, Z)$?

Si $X = Y = Z$, alors $0 \leq 0 + 0$ donc OK
Si $X = Y \neq Z$, alors $0 \leq 1 + 1$ donc OK
Si $X = Z \neq Y$, alors $1 \leq 0 + 1$ donc OK
Si $X \neq Y = Z$, alors $1 \leq 1 + 0$ donc OK
Si tous différents, alors $1 \leq 1 + 1$ donc OK

Mais clairement, cette distance n'est pas associée à une norme. En effet, prenons $X \neq Y$ et $\lambda = 3$. Alors

$$d_0(3X, 3Y) = 1 \text{ puisque } 3X \neq 3Y$$

donc $d_0(3X, 3Y) \neq 3d_0(X, Y)$.

2.2.2 Boule ouverte, Boule Fermée et Sphère

Définition 4 : (Boule ouverte, Boule fermée et Sphère)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. $\forall a \in E$, $\forall r > 0$, on définit :

1. la boule ouverte de centre a et de rayon r, comme l'ensemble des points vérifiants
$$B(a, r) = \{x \in E \ / \ \|x - a\| < r\}$$
2. la boule fermée de centre a et de rayon r, comme l'ensemble des points vérifiants
$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E \ / \ \|x - a\| \leq r\}$$
3. la sphère de centre a et de rayon r, comme l'ensemble des points vérifiants
$$S(a, r) = \{x \in E \ / \ \|x - a\| = r\}$$

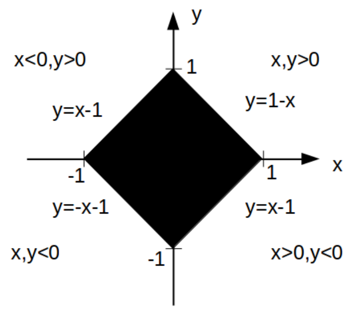
On remarque alors que $\overline{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$

La forme des boules et de la sphère dépend entièrement de la norme choisie. Pour illustrer cela, nous allons déterminer les boules fermées de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 des EVN suivants : $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

1. Cas $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$:
Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\|X - (0, 0)\|_1 = |x| + |y|$. Nous allons tout d'abord chercher la sphère, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $|x| + |y| = 1$.

   Si $x > 0, y > 0$, alors $\|X\|_1 = 1 \Longleftrightarrow x + y = 1 \Longleftrightarrow y = 1 - x$.
   Si $x > 0, y < 0$, alors $\|X\|_1 = 1 \Longleftrightarrow x - y = 1 \Longleftrightarrow y = x - 1$.

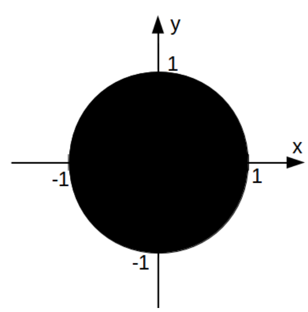
Si $x < 0, y > 0$, alors $\|X\|_1 = 1 \iff -x + y = 1 \iff y = 1 + x$.
Si $x < 0, y < 0$, alors $\|X\|_1 = 1 \iff -x - y = 1 \iff y = -1 - x$.
Donc la sphère correspond à un losange centré en 0 et la boule fermée pour la norme 1 est donnée par



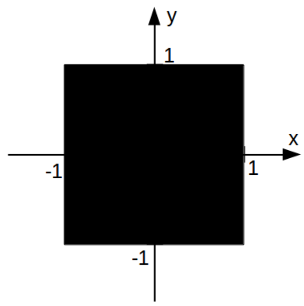
2. <u>Cas $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$</u> :
   Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminons la sphère de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble des points vérifiants

$$\|X - (0,0)\|_2 = \|X\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

   ceci correspond à un cercle de rayon 1. Ainsi la boule fermée pour la norme 2 est donnée par



3. <u>Cas $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$</u> :
   En exercice, vérifier que la boule fermée de rayon 1 et centrée en $(0, 0)$ pour la norme ∞ est donnée par



<u>Propriété 7</u> :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Alors, $\forall r, r' > 0$ et $\forall a \in E$:

$$r < r' \iff B(a,r) \subset B(a,r')$$
$$r < r' \iff \overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(a,r')$$

Démonstration : On étudie ici seulement la boule ouverte.

$\Longrightarrow$: On a

$$\begin{cases} r < r' \\ x_0 \in B(a,r) \end{cases} \Longrightarrow \|x_0 - a\| < r < r'$$

Finalement $x_0 \in B(a,r')$.

$\Longleftarrow$:

$$B(a,r) \subset B(a,r') \Longrightarrow \text{ il existe } y \begin{cases} \in B(a,r') \\ \notin B(a,r) \end{cases} \quad \text{tel que } r \leq \|y - a\| < r'$$

2.2.3 Voisinage

Définition 5 : (Voisinage)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $a \in E$ et V une partie de E. On dit que V est un voisinage de a, si, et seulement si, V contient au moins une boule ouverte centrée en a et de rayon $r > 0$.

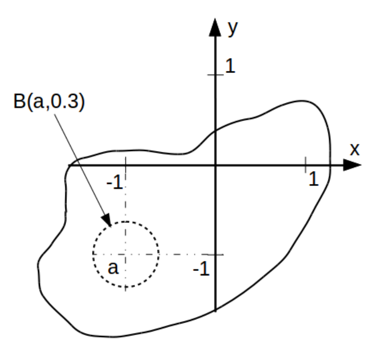
Formulation mathématique :

$$V \text{ voisinage de } a \Longleftrightarrow \exists r > 0 \ / B(a, r) \subset V$$

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Afin de mieux comprendre le concept, donnons un petit exemple de voisinage :

Pour cela, considérons $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. On cherche à savoir si l'ensemble V (cacahuète sur le schéma) est bien un voisinage du point $a = (-1, -1)$.



La réponse est oui puisqu'il existe au moins une boule ouverte, de centre a, contenue dans V. À ce stade, nous pourrions nous demander si la notion de voisinage dépend de la norme choisie ou dit autrement est-ce qu'un ensemble peut être un voisinage d'un point pour une norme donnée et ne pas l'être pour une autre norme.

Propriété 8 :

Soit E un EVN de dimension finie, muni de plusieurs normes. Soient $a \in E$ et V une partie de E. Alors le fait que V soit voisinage ou non de a ne dépend pas de la norme choisie.

Démonstration :
La démonstration de cette propriété sera discutée en TD.

Propriété 9 :

a est toujours un élément de ses voisinages $(\forall V \in \mathcal{V}(a),\ a \in V)$

Démonstration :
$\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset V$. Or $a \in B(a,r)$ puisque $\|a-a\| = \|0_E\| < r$. Donc $a \in V$ puisque $a \in B(a,r)$ et $B(a,r) \subset V$.

Propriété 10 :

Toute réunion de voisinages de a est un voisinage de a.

Démonstration :
Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille de voisinage de a. On pose $V = \cup_{i\in I} V_i$ l'union de voisinage de a. $\forall i \in I$, $\exists r_i > 0$ tel que $B(a,r) \subset V_i \subset V$. Donc, il existe bien des boules ouvertes centrées en a entièrement contenues dans V. Donc V est un voisinage de a.

Propriété 11 :

Toute intersection finie de voisinage de a est un voisinage de a.

Démonstration :
Rappel : $r < r' \Longleftrightarrow B(a,r) \subset B(a,r')$.

Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille finie de voisinage de a. On pose $V = \cap_{i\in I} V_i$ l'intersection de voisinages de a. Posons $r = \min\limits_{i\in I}(r_i)$ où r_i est le rayon de la boule ouverte contenue dans V_i. Comme pour tout i, $r_i > 0$, on a évidemment $r > 0$. Donc $\forall i$, $B(a,r) \subset B(a,r_i)$ et finalement $B(a,r) \subset V$. V est bien un voisinage de a puisqu'il contient une boule ouverte.

Remarque : (WARNING)
Montrons que si l'on considère une intersection infinie de voisinage alors ce n'est pas nécessairement un voisinage. Pour cela, considérons l'EVN $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et la famille des voisinages de 0, $V_i =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. On voit donc que
$V = \cap_{i=1}^{\infty} V_i = \{0\}$. Or aucune boule ouverte ne peut être contenue dans $V = \{0\}$ et finalement V n'est pas un voisinage.

<u>Propriété 12</u> :

Toute boule fermée ou ouverte de rayon r et de centre a est un voisinage de a.

Démonstration : Trivial.

<u>Définition 6</u> : (Espace séparé)

Soit E un ensemble quelconque. On dit que E est séparé si, et seulement si, $\forall a, b \in E$, si $a \neq b$, alors

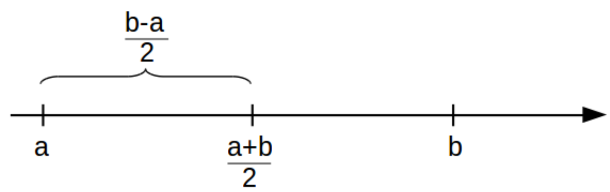
$$\exists V_a \in \mathcal{V}(a),\ \exists V_b \in \mathcal{V}(b) \text{ tels que } V_a \cap V_b = \emptyset$$

Il est en réalité très difficile de se représenter un ensemble non séparé.

<u>Propriété 13</u> : (EVN séparé)

Tout EVN est un espace séparé.

Démonstration :
Afin de faire la démonstration, nous allons nous appuyer sur la représentation sur $\mathbb{R}$ de la propriété précédente.



Soit $a, b \in E$ tels que $a \neq b$. Introduisons les deux voisinages suivants

$$V_a = B\left(a, \frac{\|b-a\|}{2}\right) \qquad\qquad V_b = B\left(b, \frac{\|b-a\|}{2}\right)$$

Vérifions que $V_a \cap V_b = \emptyset$. Pour cela, imaginons $x \in V_a \cap V_b$. On a donc, puisque x appartient aux deux boules

$$\|x-a\| < \frac{\|b-a\|}{2} \qquad \text{et} \qquad \|x-b\| < \frac{\|b-a\|}{2}$$

On peut alors utiliser l'inégalité triangulaire

$$\|a-b\| = \|a-x+x-b\| \leq \|a-x\| + \|x-b\| < \|a-b\|$$

ce qui est incohérent. Ainsi, il n'existe pas x appartenant aux deux boules et donc les deux voisinages sont disjoints.

2.2.4 Ouvert, Fermé

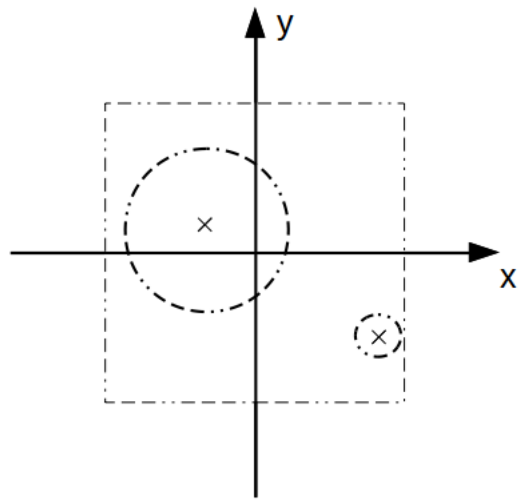
Définition 7 : (Ouvert)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN et U une partie de E. Alors U est un ouvert, si, et seulement si, il existe pour chaque point de U un voisinage contenu dans U.

Formulation mathématique :

$$U \text{ ouvert } \iff \forall x \in U,\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset U$$

Remarque importante : r peut évidemment dépendre de x. Plus on se rapproche des bords de U est plus r doit être petit. Voir le schéma ci-dessous.



Dans la suite, sur les schémas, les ouverts seront représentés par un contour en pointillé.

Comme lorsque l'on a introduit la notion de voisinage, nous nous sommes demandés si cette notion dépendait de la norme choisie, nous pouvons ici nous poser la même question, à savoir : est-ce que la notion d'ouvert dépend de la norme choisie.

Propriété 14 :

Soit E un EVN de dimension finie muni de plusieurs normes. Soit U une partie de E. Alors le fait que U soit un ouvert ou non ne dépend pas du choix de la norme.

Démonstration :
La démonstration de cette propriété sera discutée en TD.

Propriété 15 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Alors $\emptyset$ et E sont des ouverts.

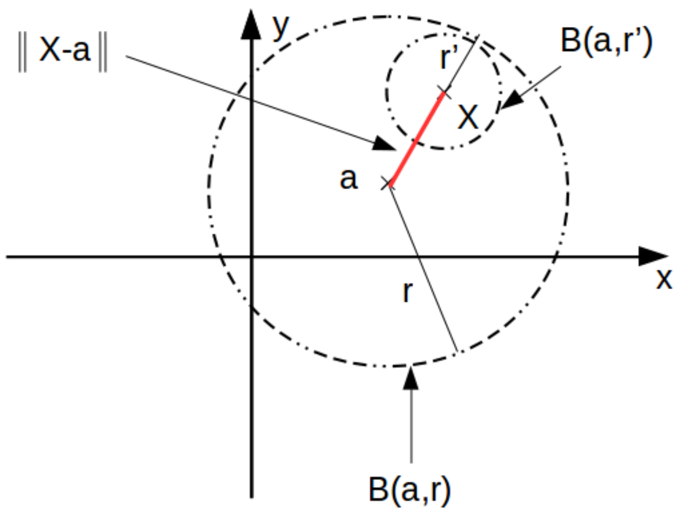
Démonstration :
À ce stade, le fait que $\emptyset$ soit un ouvert est conventionnel.

E ouvert : trivial.

Propriété 16 :

Une boule ouverte est un ouvert.

Démonstration :
Pour démontrer qu'une boule ouverte est un ouvert, nous allons nous guider avec la représentation dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ d'une boule ouverte (mais nous allons tout de même faire une démonstration générale).



Soit la boule ouverte $B(a, r)$. Guider par le schéma ci-dessus, on introduit la boule ouverte centrée en un point X quelconque appartenant à $B(a, r)$: $B(X, r' = r - \|X - a\|)$. Comme le montre le schéma, on voit que dans $\mathbb{R}^2$, $B(X, r') \subset B(a, r)$. Il suffit maintenant de montrer que cela reste vrai pour $(E, \|\cdot\|)$ quelconque et pour tout $X \in B(a, r)$.

Etape 0 : Vérifions que $B(X, r') \subset B(a, r)$ pour $(E, \|\cdot\|)$.

Soit $Y \in B(X, r')$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
&\|Y - X + X - a\| \leq \|Y - X\| + \|X - a\| \\
&\|Y - a\| < r - \|X - a\| + \|X - a\| \\
&\|Y - a\| \leq r
\end{aligned}$$

Donc $B(X, r') \subset B(a, r)$.

Etape 1 : Vérifions que $B(X, r') \subset B(a, r)$ pour tout X.

Or pour $\forall X \in B(X, r')$, $r' > 0$ puisque $r' = r - \|X - a\|$ et $\|X - a\| < r$.
Donc $\forall X \in B(a, r)$, $B(X, r') \subset B(a, r)$.

Finalement la boule ouverte est un ouvert.

Propriété 17 :

Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.

Démonstration :
Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts. On note $U = \cup_{i \in I} U_i$ l'union. Soit $x \in U$. Alors $\exists i$ tel que $x \in U_i$. Or U_i est un ouvert donc il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i \subset U$. Or ce raisonnement peut-être fait pour tout x donc U est un ouvert.

Propriété 18 :

Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration :
Soit $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'ouverts. On note $U = \cap_i U_i$ l'intersection de ces ouverts.

$$\text{Soit } x \in U \iff \begin{cases} x \in U_1 & \text{comme } U_1 \text{ est un ouvert, } U_1 \text{ est un voisinage de } x \\ x \in U_2 & \text{comme } U_2 \text{ est un ouvert, } U_2 \text{ est un voisinage de } x \\ \dots & \\ x \in U_n & \text{comme } U_n \text{ est un ouvert, } U_n \text{ est un voisinage de } x \end{cases}$$

Donc x appartient à une intersection finie de voisinage de x qui est donc un voisinage de x. Donc pour tout $x \in U$, U est un voisinage de x donc U est un ouvert.

Corollaire des propriétés précédentes :

Soient $E = \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Alors, les intervalles suivants sont des ouverts

$$]-\infty, b[\qquad]a, b[\qquad]a, +\infty[$$

Démonstration :

- $]a, b[= B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$. Or une boule ouverte est un ouvert donc $]a, b[$ est un ouvert.
- $]-\infty, b[= \cup_{\alpha<b}]\alpha, b[$ union infinie d'ouverts donc ouvert.
- $]a, \infty[= \cup_{\alpha>a}]a, \alpha[$ union infinie d'ouverts donc ouvert.

Définition 8 : (Fermé)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN et F une partie de E. Alors F est un fermé si, et seulement si, $C_E F$ (complémentaire de F dans E) est un ouvert.

Propriété 19 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN, alors $\emptyset$ et E sont des fermés.

Donc E et $\emptyset$ sont à la fois des ouverts et des fermés (voir prop. 15).

Démonstration :

- Pour $\emptyset$: $C_E \emptyset = E$ qui est un ouvert donc $\emptyset$ est un fermé.
- Pour E : $C_E E = \emptyset$ qui est un ouvert (d'après la propriété 15) donc E est un fermé.

Propriété 20 :

Une boule fermée est un fermé.

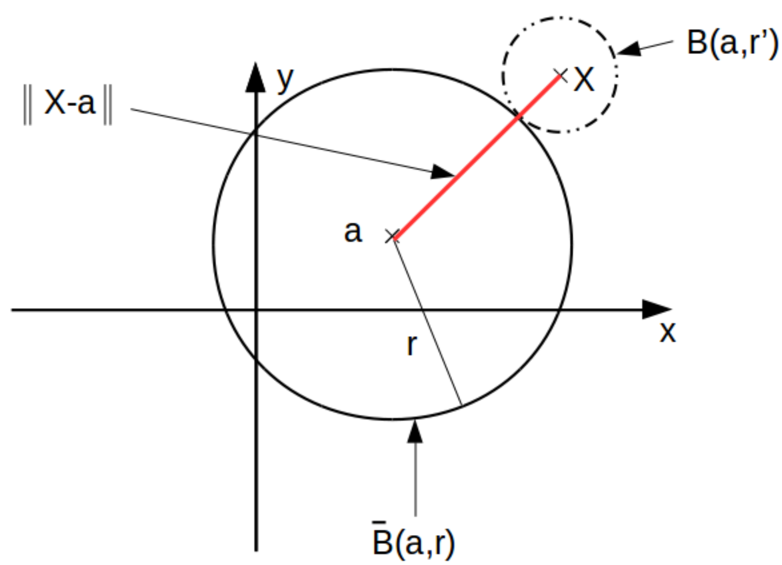
Démonstration :
Afin de faire la démonstration, on va s'aider du schéma ci-dessous valable dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. On doit donc étudier si le complémentaire de $\overline{B}(a,r)$ est un ouvert. On commence par introduire en suivant le schéma suivant, en un point X quelconque de $C_E\overline{B}(a,r)$, la boule ouverte $B(X, \|X-a\|-r)$. Commençons par montrer que cette boule est bien incluse dans $C_E\overline{B}(a,r)$ puis on montrera que cela est vrai pour tout $X \in C_E\overline{B}(a,r)$.

Etape 0 : Vérifions que $B(X, \|X-a\|-r) \subset C_E\overline{B}(a,r)$
Soit $Y \in B(X, \|X-a\|-r)$. Alors

$$\begin{aligned}
&\|X-a\| = \|X-Y+Y-a\| \leq \|X-Y\| + \|Y-a\| \\
\iff & -\|Y-a\| \leq \|X-Y\| - \|X-a\| \\
\iff & -\|Y-a\| < \|X-a\| - r - \|X-a\| \\
\iff & \quad \|Y-a\| > r
\end{aligned}$$

On voit donc que Y est bien extérieur à $\overline{B}(a,r)$, donc $Y \in C_E\overline{B}(a,r)$.

Etape 1 : Or $\forall X,\ \|X-a\| - r > 0$ et donc $C_E\overline{B}(a,r)$ est un ouvert et donc $\overline{B}(a,r)$ est un fermé.



Propriété 21 :

Toute intersection de fermés est un fermé.

Démonstration :
Rappel : $C_E(\cup_i U_i) = \cap_i(C_E U_i)$.

On sait que si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts alors :

1. $U = \cup_i U_i$ est un ouvert (propriété 17).
2. $(C_E U_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés (puisque le complémentaire de $C_E U_i$ est U_i qui est un ouvert).

Puisque U est un ouvert, $C_E U$ est un fermé et puisque, pour tout i, U_i est un ouvert, $C_E U_i$ est un fermé. Or

$$C_E U = C_E(\cup_i U_i) = \cap_i(C_E U_i)$$

Donc l'intersection de fermés est fermé.

Propriété 22 :

Toute union finie de fermés est un fermé.

Démonstration :
Même chose que précédemment. En passant au complémentaire c'est immédiat.

Corollaire :

Soient $E = \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Alors, les intervalles suivants sont des fermés

$$]-\infty, b] \qquad [a, b] \qquad [a, +\infty[$$

Démonstration :

— $[a, b] = \overline{B}(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$. Or une boule fermée est un fermé donc $[a, b]$ est un fermé.

— trivial.
— trivial.

2.2.5 Intérieur et adhérent

Définition 9 : (Intérieur)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est intérieur à A si, et seulement si, A est un voisinage de a. On appelle Intérieur de A, que l'on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.

Formulation mathématique

$$x \in \mathring{A} \iff \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A$$
$$x \in \mathring{A} \iff \exists U \subset A \ / \ U \text{ ouvert et } x \in U$$

Propriété 23 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $\mathring{A}$ l'intérieur de A. Alors $\mathring{A} \subset A$.

Démonstration :
$x \in \mathring{A} \iff \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A$ donc $x \in A$ donc $\mathring{A} \subset A$.

Propriété 24 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $\mathring{A}$ l'intérieur de A. Alors $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Démonstration :

— Montrons tout d'abord que tout ouvert U inclus dans A est inclus dans $\mathring{A}$
Soit $U \subset A$ un ouvert. Alors

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset U \subset A \text{ donc } x \in \mathring{A}$$

Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts tels que $U_i \subset A$. Alors puisque $\cup_i U_i$ est également un ouvert contenu dans A alors $\cup_i U_i \subset \mathring{A}$

— Il faut maintenant montrer que $\mathring{A} \subset \cup_i U_i$
Soit $x \in \mathring{A}$ tel que x n'appartient à aucun ouvert $U \subset A$ alors $x \notin \mathring{A}$.
Donc $\mathring{A} \subset \cup_i U_i$

Finalement, on voit que $\mathring{A} = \cup_i U_i$ où l'union porte sur tous les ouverts inclus dans A. Donc finalement $\mathring{A}$ est le plus grand des ouverts contenu dans A.

<u>Propriété 25</u> :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient A et B deux parties de E. Alors

1. A ouvert $\Longleftrightarrow \mathring{A} = A$
2. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$
3. Si $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

Démonstration :

1. (a) Si A est un ouvert alors le plus grand ouvert contenu dans A est A lui-même. Donc $\mathring{A} = A$.
   (b) Si $\mathring{A} = A$ alors A est un ouvert puisque $\mathring{A}$ est un ouvert.
2. $\mathring{A}$ est un ouvert. Donc le plus grand ouvert contenu dans $\mathring{A}$ est $\mathring{A}$. Finalement $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
3. Soit $x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A \subset B$ donc $x \in \mathring{B}$. Finalement $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Quelques exemples :

— Dans $\mathbb{R}$:

$$\overset{\circ}{]a,b[} = \overset{\circ}{[a,b[} = \overset{\circ}{]a,b]} = \overset{\circ}{[a,b]} =]a,b[$$

— Dans $\mathbb{R}^n$:

$$\mathring{\overline{B}}(a,r) = B(a,r) \qquad\qquad \mathring{B}(a,r) = B(a,r)$$

Définition 10 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est adhérent à A si, et seulement si, tout voisinage de a rencontre A. On appelle l'adhérent de A, noté $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A.

Formulation mathématique :

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

Propriété 26 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit A une partie de E. Alors $A \subset \overline{A}$

Démonstration :
$\forall x \in A, \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ puisque $x \in A$ et $x \in B(x,r)$. Donc $x \in \overline{A}$ et finalement $A \subset \overline{A}$.

Propriété 27 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit A une partie de E. Alors $\overline{A}$ est un fermé

Démonstration :
Pour cela étudions $C_E\overline{A}$: si c'est un ouvert alors $\overline{A}$ est un fermé.

$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0 \ /\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Donc pour $\forall x \in C_E\overline{A},\ \exists r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \emptyset$ sinon x serait un élément de $\overline{A}$. Donc, $\exists r > 0\ / B(x,r) \subset C_E\overline{A}$. On voit donc que $C_E\overline{A}$ est un ouvert. Finalement $\overline{A}$ est un fermé.

Propriété 28 :

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration :
Démonstration remise à plus tard.

Propriété 29 :

1. A fermé $\iff$ $\overline{A} = A$
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
3. Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$

Démonstration :

1. (a) Si $\overline{A} = A$ alors comme $\overline{A}$ est un fermé alors A est un fermé.
   (b) Si A est un fermé alors le plus petit fermé qui contient A est A. Donc $\overline{A} = A$
2. Soit $\overline{A}$ l'adhérent de A. Donc $\overline{A}$ est un fermé. Donc le plus petit fermé contenant $\overline{A}$ est $\overline{A}$. Finalement $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
3. Soit $a \in \overline{A}$ et V un voisinage de a. On a donc que $A \cap V \neq \emptyset$. Or comme $A \subset B$, on a $A \cap V \subset B \cap V$, il vient que $B \cap V \neq \emptyset$. Finalement $a \in \overline{B}$.

Définition 11 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit A une partie E. On appelle frontière de A, noté $Fr(a)$ ou ∂A, l'ensemble :

$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$$

Quelques exemples :

Soit la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ alors

$$\overline{\overline{B}}(a, r) = \overline{B}(a, r) \qquad \text{et} \qquad \mathring{\overline{B}}(a, r) = B(a, r)$$

Donc

$$\partial \overline{B}(a, r) = \overline{B}(a, r) \backslash B(a, r) = S(a, r)$$

Propriété 30 :

1. $\overline{A} = A \cup \partial A$
2. $\mathring{A} = A \backslash \partial A$

Démonstration :
Démonstration remise à plus tard.

2.2.6 Méthodologies

Montrer qu'un ensemble A n'est pas ouvert :
Le plus simple est de trouver au moins un point (qui se trouve sur la frontière de l'ensemble) tel que quelque soit la taille de la boule ouverte, une partie de la boule soit en dehors de A.

Montrer qu'un ensemble A n'est pas fermé :
Le plus simple est de montrer que le complémentaire de cet ensemble n'est pas ouvert. Pour cela, il suffit d'appliquer la méthode précédente au complémentaire de A.

Trouver l'adhérent de A : (démonstration dans le TD3)
Il est relativement facile d'avoir une idée intuitive de ce qu'est $\overline{A}$ connaissant A. En effet, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Dans la suite, nous allons appeler B l'ensemble que nous considérons comme le candidat pour être $\overline{A}$.

Etape 1 : Vérifier que B est un fermé.
Etape 2 : Vérifier que $A \subset B$.

Si les deux conditions précédentes sont bien remplies, alors on sait que pour $\forall x \in C_E B$, on a $\exists r > 0 \ / \ B(x,r) \cap A = \emptyset$. On est alors sûr qu'il n'y a pas de points extérieurs à B qui appartient à $\overline{A}$. Ceci revient à dire que B n'est pas trop petit.

Toutefois, à ce stade, on sait seulement que $\overline{A} \subset B$ mais on ne sait pas si B est trop grand (on doit vérifier que $B \subset \overline{A}$).

Etape 3 : Il faut maintenant vérifier que B n'est pas trop grand (B trop grand si, et seulement si, $\exists x \in B \backslash A$ tel que $\exists r > 0, \ B(x,r) \cap A = \emptyset$).

On doit vérifier que pour $\forall x \in B \backslash A$:

$$\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

alors $\overline{A} = B$. Sinon il faut supprimer les points qui ne vérifient pas cette condition.

<u>Trouver l'intérieur de A :</u> (démonstration dans le TD3)
Comme précédemment, il est plutôt facile d'avoir une intuition de ce qu'est $\mathring{A}$ puisqu'il s'agit du plus grand ouvert contenu dans A. Notons B ce candidat. Alors

Etape 1 : Vérifier que B est un ouvert
Etape 2 : Vérifier que $B \subset A$

Si les deux conditions précédentes sont remplies, alors $\forall x \in B,\ \exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$, ce qui revient à vérifier que B n'est pas trop grand : $B \subset \mathring{A}$.

Toutefois, à ce stade, on sait que B n'est pas trop grand mais il reste à vérifier que B n'est pas trop petit ($\mathring{A} \subset B$).

Etape 3 : On doit vérifier que pour $\forall x \in A \backslash B$ alors :

$$\forall r > 0,\ B(x,r) \not\subset A$$

Si c'est le cas alors $\mathring{A} = B$. Sinon, B est trop petit.

2.3 Suites d'éléments d'un EVN

2.3.1 Rappels

En première année, vous avez étudié ce qu'est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Le but étant dans cette partie de chapitre, d'étendre au cas de suites d'éléments d'un EVN quelconque, commençons par rappeler ce que vous connaissez déjà.

<u>Rappel 1 :</u> (Suite d'éléments de $\mathbb{R}$)

Une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Si x est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ de terme général x_n, on notera la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Comme exemples de telles suites, nous pouvons considérer

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n = 2.3n \end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n = \frac{1}{n} \end{array}$$

Rappel 2 : (Suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui converge)

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, elle vérifie le critère suivant :

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ |x_n - l| < \epsilon$$

On note alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ cette limite.

Nous n'allons pas rentrer plus en détail mais vous avez aussi vu que la limite, si elle existe, est unique. Je renvoie à votre cours de 1ère année pour plus de détails (sachant que nous allons généraliser ces définitions et résultats dans ce cette partie).

2.3.2 Généralisation et Généralités

Définition 12 : (Suite d'éléments d'un EVN)

Soit E un espace vectoriel normé. Une suite d'éléments de E est une application de $\mathbb{N}$ dans E. Si x est une suite de E de terme général x_n, on notera la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Quelques exemples :

— si $E = \mathbb{R}$, on retombe sur le cas étudié en première année :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n = 2.3n \end{array}$$

— si $E = \mathbb{R}^3$ (cas étudié en analyse dans $\mathbb{R}^n$) :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^3 \\ n & \mapsto & \left(\frac{1}{n}; 2n+3; (\frac{3}{2})^n\right) \end{array}$$

<u>Définition 13</u> : (Suite bornée)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est dite bornée si, et seulement si, la suite numérique réelle $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire si, et seulement si

$$\exists M > 0 \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \|x_n\| \leq M$$

Attention, il est capital de noter que M est indépendant de n.

Quelques exemples :

— Soit $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$:
Considérons la suite

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n = -1/n \end{array}$$

Alors

$$\|x_n\| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq 1$ et la suite est bornée.

— Soit $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$:
Considérons la suite

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^3 \\ n & \mapsto & x_n = (2n, -3n, 1/n) \end{array}$$

Alors

$$\|x_n\|_2 = \sqrt{4n^2 + 9n^2 + \frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc x_n n'est pas borné.

2.3.3 Suites Convergentes

Définition 14 : (Suite convergente)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $l \in E$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers l si, et seulement si, elle vérifie l'une des 3 propriétés équivalentes suivantes

1. $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ \|x_n - l\| < \epsilon.$
2. $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ x_n \in B(l, \epsilon).$
3. $\forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ x_n \in V.$

Les 3 formulations sont parfaitement équivalentes puisque

$$\|x_n - l\| < \epsilon \Longleftrightarrow x_n \in B(l, \epsilon)$$

Donc 1. et 2. sont équivalents. De plus

$$V \in \mathcal{V}(l) \Longleftrightarrow \exists \epsilon > 0\ /\ B(l, \epsilon) \subset V$$

donc

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \text{ on considère } B(l, \epsilon)$$

d'où l'on déduit que 2. et 3. sont équivalents.

Propriété 31 : (Unicité de la limite)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Si une suite d'éléments de E, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge alors elle admet une limite unique l. On note alors cette limite

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \tag{2.8}$$

Démonstration :
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$. Par hypothèse, posons $l_1, l_2 \in E$ tels que $l_1 \neq l_2$, vers lesquels x_n converge. On a donc, d'après la définition de la convergence :

$$\forall V_{l_1} \in \mathcal{V}_{l_1},\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N_1,\ x_n \in V_{l_1}$$
$$\forall V_{l_2} \in \mathcal{V}_{l_1},\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N_2,\ x_n \in V_{l_2}$$

Or un EVN est séparé donc comme $l_1 \neq l_2$, $\exists V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$ et $\exists V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. On a donc, en posant $N = max(N_1, N_2)$:

$$\forall n \geq N, \begin{cases} x_n \in V_1 \\ x_n \in V_2 \end{cases}, \quad \text{or } V_1 \cap V_2 = \emptyset \text{ donc absurde}$$

et finalement $l_1 = l_2$.

Propriété 32 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E, convergentes vers l, $l' \in E$ respectivement. On a alors

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|l\|$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0_E \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + \lambda y_n) = l + \lambda l'$

Remarque : faisons une petite remarque avant de démontrer les propriétés précédentes. Quelle est la signification de

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|l\|$$

La suite $\|x_n\|$ est une suite d'éléments de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ puisque la norme $\|\cdot\|$ est une application de E dans $\mathbb{R}^+$. Ainsi, on a, d'après le Rappel 2 (en notant que $\|l\| \in \mathbb{R}^+$) :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|l\| \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |\|x_n\| - \|l\|| < \epsilon$$

Démonstration :

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N,\ \|x_n - l\| < \epsilon$$

or d'après la 2nd inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|\,\|x_n\| - \|l\|\,| \leq \|x_n - l\|$, on a donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N,\ |\,\|x_n\| - \|l\|\,| \leq \|x_n - l\| < \epsilon$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|l\|$$

Remarque :
Mais attention, la réciproque est trivialement fausse.
Pour voir cela, nous pouvons considérer la suite d'éléments de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ suivante :

$$x_n = (-1)^n$$

Alors trivialement $\|x_n\| = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ alors même que la suite x_n n'admet aucune limite.

2. C'est immédiat. En effet,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n = 0_E \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N, \|x_n\| < \epsilon \\
\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N, \|x_n\| < \epsilon
\end{aligned}$$

C'est donc totalement équivalent.

3. On a

$$\begin{aligned}
&\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ \|x_n - l\| < \epsilon \\
&\forall\epsilon' > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N',\ \|y_n - l\| < \epsilon'
\end{aligned}$$

or d'après l'inégalité triangulaire

$$\left\|x_n + \lambda y_n - (l + \lambda l')\right\| \leq \|x_n - l\| + |\lambda| \left\|y_n - l'\right\|$$

donc en posant $\epsilon'' = \epsilon + |\lambda|\epsilon'$, on obtient

$$\forall\epsilon'' > 0,\ \exists N'' = max(N, N') \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N'',\ \left\|x_n + \lambda y_n - (l + \lambda l')\right\| < \epsilon''$$

donc $\lim_{n\to\infty} (x_n + \lambda y_n) = l + \lambda l'$

Propriété 33 :

Soit $E = (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$. On note

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}} \ , \ \dots \ , \ (x_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ où les $\left(x_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites d'éléments de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (l_1, l_2, ..., l_p) \text{ avec } l_i = \lim_{n\to\infty} x_n^{(i)}$$

Démonstration :

$$l_i = \lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} \iff \forall \epsilon_i > 0, \ \exists N_i \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N_i, \ |x_n^{(i)} - l_i| < \epsilon_i$$

Posons $N = \max(N_1, ..., N_p)$ et $\epsilon = \sum_{i=1}^p \epsilon_i$. Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base normée, pour la norme choisie, de $\mathbb{R}^p$. Alors

$$\begin{aligned}
\|x_n - (l_1, l_2, ..., l_p)\| &= \left\|(x_n^{(1)} - l_1)e_1 + ... + (x_n^{(p)} - l_p)e_p\right\| \\
&\leq \left\|(x_n^{(1)} - l_1)e_1\right\| + \left\|(x_n^{(2)} - l_2)e_2\right\| + ... + \left\|(x_n^{(p)} - l_1)e_p\right\| \\
&\leq |x_n^{(1)} - l_1| \, \|e_1\| + |x_n^{(2)} - l_2| \, \|e_2\| + ... + |x_n^{(p)} - l_p| \, \|e_p\| \\
&\leq \sum \epsilon_i = \epsilon
\end{aligned}$$

Exemple :
Soit la suite

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^2 \\ n & \mapsto & x_n = (1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \end{array}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right) = (1, 0)$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $l = (1, 0)$.

2.3.4 Valeur d'adhérence et point d'adhérent

Définition : (Suite extraite, Rappel)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Soit ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On appelle alors suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou sous-suite extraite) la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$y_n = x_{\phi(n)}$$

Une suite extraite d'une suite, est simplement une suite dont on choisit les éléments (mais cette séléction se fait forcément en augmentant le rang des éléments qui sont sélectionnés). Ainsi on peut, par exemple, pour construire la suite extraite y_n, sélectionner la suite x_n pour $n = 1$, puis 2, puis 20 puis 21... et ainsi de suite. Mais on ne peut pas choisir $n = 1$, puis 2, puis 20 puis 18 car alors la fonction ϕ ne serait pas strictement croissante.

Considérons par exemple la suite

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R}^2 \\ n & \mapsto & x_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n^2}\right) \end{array}$$

On peut par exemple extraire de cette suite, tous les éléments n pairs de la suite, conduisant ainsi à la suite extraite

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R}^2 \\ n & \mapsto & y_n = x_{2n} = \left(1, \frac{1}{(2n)^2}\right) \end{array}$$

Propriété 35 : (convergence des suites extraites d'une suite convergente)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers $l \in E$. Alors toute suite extraite converge également vers l.

Démonstration :

— Tout d'abord, comme ϕ est une fonction strictement croissante de $n \in \mathbb{N}$, on a évidemment, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$. Montrons-le par récurrence.

rang 0 : $\phi(0) \geq 0$ donc OK

hérédité : vérifions que si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$. Vérifions donc que l'on a bien $\phi(n+1) \geq n+1$.

Par hypothèse : $\phi(n) \geq n$. Or ϕ est strictement croissante donc $\phi(n+1) > \phi(n)$. Puisque $\phi(n) \geq n$, on déduit que $\phi(n+1) > \phi(n) \geq n$. D'où l'on déduit que $\phi(n+1) \geq n+1$. CQFD.

— Montrons maintenant que toute suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l, converge aussi vers l.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV vers } l \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ \|x_n - l\| < \epsilon$$

or $\forall n,\ \phi(n) \geq n$ donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall \phi(n) \geq n \geq N,\ \left\|x_{\phi(n)} - l\right\| < \epsilon$$

donc finalement $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\phi(n)} = l$.

Définition 14 : (Valeur d'adhérence d'une suite)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $l \in E$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Soit $a \in E$. Alors, on dit que a est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si, et seulement si, l'une des propriétés (équivalentes) suivantes est vérifiés

1. Il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
2. $\forall \epsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ \|x_n - a\| < \epsilon\}$ est infini.
3. $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in V\}$ est infini.

Exemple :

Soit la suite

$$\begin{array}{rcccl} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & \begin{cases} x_{2n} = 1 \\ x_{2n+1} = -1 \end{cases} \end{array}$$

- Alors, il existe une suite extraite, la suite des n paires, qui converge vers 1. Donc 1 est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Il existe une autre suite extraite, la suite des n impaires, qui converge vers -1.

On voit donc que la suite des $x_n = (-1)^n$ est bornée car $\|x_n\| = 1$, a deux valeurs d'adhérence 1 et -1 mais malgré tout est non convergente.

Propriété 36 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in E$, alors l est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration :

- l est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car il suffit de prendre comme suite extraite, la suite elle-même ($\phi \ : \ n \longrightarrow n$).
- Or d'après la propriété 35, toute suite extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera également vers l.

Attention : la réciproque est fausse. Une suite peut n'avoir qu'une valeur d'adhérence est être non convergente. Exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{2n} = 2n \\ x_{2n+1} = 1 \end{cases}$$

1 est valeur d'adhérence de la suite, tandis que la suite diverge.

Propriété 37 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. Alors, les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. a est adhérent à A.
2. il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A dont a est une valeur d'adhérence.
3. il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a.

Démonstration :

- $1 \Longrightarrow 3$: soit a un point adhérent à A. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$B\Big(a, \frac{1}{n}\Big) \cap A \neq \emptyset$$
Soit $x_n \in A \cap B(a, 1/n)$. Alors puisque $x_n \in B(a, 1/n)$, on a
$$\|x_n - a\| < \frac{1}{n} \text{ donc } \lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{2.9}$$
- $3 \Longrightarrow 1$: Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers a. Soit V un voisinage de a. Alors, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ x_n \in V$. Or $x_n \in A$ puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A. On conclut donc que $x_n \in A \cap V$ donc $A \cap V \neq \emptyset$. On peut faire ce raisonnement pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$. Donc $a \in \overline{A}$.
- $2 \Longrightarrow 3$: On choisit alors comme suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite qui converge vers a.
- $3 \Longrightarrow 2$: Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A converge vers a alors a est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Finalement $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$.

Propriété 38 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. Alors

1. $\overline{A}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites d'éléments de A, ou dit autrement, l'ensemble des limites de toutes les suites convergentes d'éléments de A.
2. A est fermé si, et seulement si, toute suite d'éléments de A qui converge admet une limite dans A.

Démonstration :

1. $a \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ il existe une suite d'éléments de A qui converge vers A (propriété 37).
   Donc $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites de A.

2. $\Longrightarrow$: Si A fermé alors $\overline{A} = A$. Or $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites des éléments de A. Donc si A fermé, l'ensemble des suites convergentes de A converge dans A.

   $\Longleftarrow$: la réciproque est tout aussi évidente.

2.3.5 Suites de Cauchy

Définition 15 : (Suite de Cauchy)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ (\forall n \geq N, \forall p \geq N), \|x_p - x_n\| < \epsilon$$

Avant de discuter de l'intérêt du concept de suite de Cauchy, nous allons montrer quelques propriétés.

Propriété 39 :

1. Toute suite convergente est de Cauchy
2. Toute suite de Cauchy est bornée

Démonstration :

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers l. Alors

   $$\forall \epsilon_1 > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ \|x_n - l\| < \epsilon_1$$

   Or, $\forall x_n, x_p$

   $$\|x_n - x_p\| = \|x_n - l + l - x_p\| \leq \|x_n - l\| + \|x_p - l\|$$

   Donc, $\forall n, p \geq N$, on a

   $$\|x_n - x_p\| < 2\epsilon_1$$

   et finalement

   $$\forall \epsilon = 2\epsilon_1 > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n, p \geq N, \|x_p - x_n\| < \epsilon$$

2. Démonstration remise à plus tard.

Propriété 40 :

Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle converge vers sa valeur d'adhérence.

Démonstration :
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E. Soit a une valeur d'adhérence de la suite. Alors :

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N_c \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_c$, et $p \geq N_c$, on ait $\|x_n - x_p\| < \epsilon/2$. Soit $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite qui converge vers a. Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on ait $\left\|x_{\phi(n)} - a\right\| < \epsilon/2$. On note $N = max(N_c, N_1)$. Pour tout $n \geq N$, on a $\phi(n) \geq n \geq N \geq N_c$. D'où

$$\|x_n - a\| \leq \left\|x_n - x_{\phi(n)}\right\| + \left\|x_{\phi(n)} - a\right\| < \epsilon$$

Nous venons de montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} /\ \forall n \geq N,\ \|x_n - a\| < \epsilon$$

Donc la suite converge vers la valeur d'adhérence a.

Il est important de discuter du contenu mathématique des suites de Cauchy. La définition stipule que les termes d'une suite de Cauchy se rapproche inéxorablement à partir d'un certain rang. Intuitivement, cela implique qu'une suite de Cauchy converge. Toutefois, et il est capital de le comprendre, une suite de Cauchy ne converge pas nécessairement dans le même espace que l'espace dans lequel la suite est définie.

Pour le comprendre, étudions la suite suivante (suite de Héron)

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \text{ avec } x_0 = 2$$

Commençons par remarquer que tous les termes de la suite sont évidemment des rationnels.

Ensuite, on peut déterminer le point de convergence de cette suite. Pour cela, on voit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$. De plus

$$x_{n+1}^2 - 2 = \left(\frac{x_n^2+2}{2x_n}\right)^2 - 2 = \frac{x_n^4 + 2^2 + 2\times 2x_n^2}{4x_n^2} - 2 = \left(\frac{x_n^2-2}{2x_n}\right)^2 \geq 0$$

d'où l'on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geq \sqrt{2}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2+2}{2x_n} - x_n = \frac{2-x_n^2}{2x_n}$$

or puisque $x_n \geq \sqrt{2}$, on a $2 - x_n^2 \leq 0$, ce qui implique que $x_{n+1} \leq x_n$. Donc la suite est décroissante et positive ce qui implique qu'elle converge (rappel du cours de préING 1). Donc puisque la limite existe, notons la l. On a donc

$$l = \frac{l + \frac{2}{l}}{2} \Longrightarrow l = \sqrt{2} \qquad \text{car la suite est positive}$$

Donc, alors que la suite de Héron est une suite définie sur l'espace des rationnels $\mathbb{Q}$, elle converge vers un irrationnel. Ainsi, il est intéressant de distinguer les espaces tels que toute suite de Cauchy définie dessus, y converge, des espaces où les suites de Cauchy ne convergent pas (mais convergent tout de même en dehors). Ainsi :

Définition 16 : (Espace complet, Espace de Banach)

1. Un espace métrique (c'est-à-dire un espace muni d'une distance) est dit complet si, et seulement si, toute suite de Cauchy définie sur cet espace y converge.
2. Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach

Ce type d'espace jouera un rôle central en analyse fonctionnelle (cursus GM, Math-φ).

2.3.6 Compacité

Théorème 1 : (de Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée d'un espace vectoriel de dimension finie possède une suite extraite convergente.

Démonstration : Admis.

Définition 17 : (Compacité)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $A \subset E$. On dit que A est compact dans E si et seulement si toute suite de A admet une suite extraite convergente dans A.

Exemple :
$\mathbb{R}$ est un ensemble non compact. En effet, considérons la suite

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n = n \end{array}$$

cette suite ne converge pas et aucune suite extraite d'elle ne converge. Donc il existe au moins une suite de $\mathbb{R}$ dont aucune suite extraite ne converge dans $\mathbb{R}$. Finalement $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Propriété 41 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN de dimension finie. Alors

1. compact $\Longleftrightarrow$ fermé et borné
2. l'ensemble vide est compact.
3. toute partie fermée d'un compact de E est compacte

Démonstration :

1. (a) Montrons tout d'abord que : compact $\Longrightarrow$ fermé et borné.

   compact $\Longrightarrow$ fermé : A compact donc de toute suite x_n, on peut extraire une suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers $l \in A$. Or, si la suite x_n converge, elle converge nécessairement vers l. Donc toute suite convergente d'éléments de A converge dans $A \Longrightarrow$ fermé (caractérisation séquentielle des fermés).

compact $\Longrightarrow$ borné : Pour cela prenons la contraposé

$$\text{non borné} \Longrightarrow \text{non compact}$$

Si l'ensemble A n'est pas borné, alors on peut prendre une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \geq n$. D'où, pour toute suite extraite $(x_{\phi(n)})$, nous avons $n \leq \phi(n) \leq \left\|x_{\phi(n)}\right\|$. On en déduit donc que toute suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donc A n'est pas compact.

Finalement, compact $\Longrightarrow$ borné, fermé.

(b) Montrons maintenant que borné, fermé $\Longrightarrow$ compact :

Soit A un ensemble borné d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors toute suite de A est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weiestrass, toute suite de A admet donc une suite extraite qui converge. Or A est fermé donc $\overline{A} = A$ donc toute suite extraite converge bien dans A.

2. l'ensemble vide est fermé et borné donc c'est un compact.
3. A compact $\Longrightarrow$ A fermé et borné. Soit $B \subset A$ un fermé. Alors B est également borné (puisque A borné). Donc B est un compact.

Remarque : en dimension infinie la propriété 1. devient

compact $\Longrightarrow$ borné et fermé (mais la réciproque devient fausse)

Propriété 42 :

Tout compact d'un espace vectoriel normé est complet.

Démonstration :

Rappel pour la démonstration :

1. complet : toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A.
2. toute suite convergente est de Cauchy
3. toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge

A est un compact donc toute suite x_n d'éléments de A admet une suite extraite $x_{\phi(n)}$ qui converge dans A. Or si x_n est une suite de Cauchy, alors elle admet une valeur d'adhérence dans A et converge donc vers cette valeur d'adhérence $\Longrightarrow$ toute suite de Cauchy de A converge dans A donc A complet.

Propriété 43 :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ deux compacts. Alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$.

Démonstration remise à plus tard.

Chapitre 3

Limite et Continuité d'applications

3.1 Objectifs du chapitre

Le but de ce chapitre est de généraliser les notions de limite de fonctions et de continuité que vous avez étudiées en préING 1 pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (fonctions d'une variable) aux fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ (où $p, n \in \mathbb{N}^*$, fonction de plusieurs variables).

Rappels de préING 1 :

— Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors la limite l de f quand x tend vers a est

$$\forall \epsilon,\ \exists \alpha > 0,\ (\forall x \in D,\ |x - a| < \alpha) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

ce que l'on note : $\lim_{x \to a} f(x) = l$

— Si a appartient au domaine de définition de la fonction alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

puisque $\forall \epsilon > 0$, $|f(a) - l| < \epsilon$.

Dit autrement, si $f(a)$ n'aboutit pas une forme indéterminée $0/0$, $0 \times \infty$, ∞/∞ ou encore $\infty - \infty$ alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

S'il y a une forme indeterminée, alors il faut la lever pour trouver la limite. Par exemple

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \quad \text{Forme indeterminée}$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-1} = 0$$

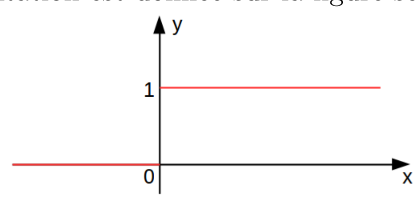
— Pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit continue en a, il faut et il suffit que

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

exemple : Soit la **fonction de Heaviside** (que vous avez rencontré dans le cours d'Automatique)

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

dont une représentation est donnée sur la figure suivante



Clairement, cette fonction n'admet pas de limite en 0.

Nous allons donc généraliser ces remarques (et plus encore...) aux cas des fonctions de $\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (fonctions de plusieurs variables) comme par exemple les fonctions suivantes

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x} \ ; \ \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \end{array}$$

On peut alors se demander : quelle est la limite de f et g au point $(1,2)$? Sont-elles continues en $(0,0)$?

Nous verrons que les notions de topologie introduites au chapitre précédent sont capitales : **norme, voisinage, ouvert, fermé, borné**.

3.2 Limite, Continuité

Nous devons commencer par généraliser la notion de **limite** des fonctions de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ au cas des fonctions d'un EVN quelconque dans un autre EVN.

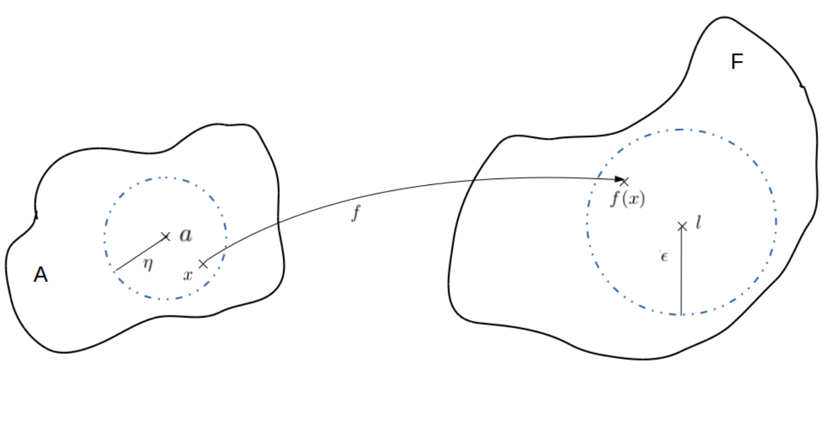
Définition 1 : (limite d'une fonction en un point)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soit $A \subset E$. Soit f une application de A dans F. Soient $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. On dit que f admet une limite l lorsque x tend vers a, si et seulement si, l'une des propriétés (équivalentes) suivantes est vérifiée

1. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A, \|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\|_F < \epsilon$
2. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A, x \in B_E(a, \eta) \Longrightarrow f(x) \in B_F(l, \epsilon)$
3. $\forall V_F \in \mathcal{V}(l),\ \exists V_E \in \mathcal{V}_E(a),\ \forall x \in A,\ (x \in V_E \Longrightarrow f(x) \in V_F)$
4. $\forall V_F \in \mathcal{V}(l),\ \exists V_E \in \mathcal{V}_E(a),\ f(V_E \cap A) \subset V_F$

Remarques :

— ϵ est la précision à laquelle on connait la valeur prise par $f(x)$. Ainsi, on fixe la précision ϵ. Alors, il existe η tel que pour tout x se trouvant à une distance inférieure à η possède une image par f à une distance de l inférieure à la précision ϵ.



Si ϵ tend vers 0 alors η doit tendre vers 0.

— Si f est définie en a, alors la limite est $f(a)$.
Exemple :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

Alors en $a = (1,1)$ on a $f(a) = f(1,1) = \frac{1}{2}$ qui est donc la limite de f en a.

Mais en $a = (0,0)$, on voit que l'on obtient une forme indeterminée du type 0/0. Il faut alors lever l'indetermination. On étudiera dans la suite de ce chapitre des techniques pour cela lorsque la fonction est à plusieurs variables comme c'est le cas ici.

Propriété 1 : (unicité de la limite)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soit $A \subset E$. Soit f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$. Si f admet une limite $l \in F$ en a alors elle est unique.

On note alors cette limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Démonstration :
Supposons que f possède deux limites l et l' telles que $l \neq l'$. Posons alors $\epsilon = \frac{1}{3} \|l - l'\|_F > 0$. Alors, il existe $\eta, \eta' > 0$ tels que

$$\begin{cases} \forall x \in A, \ \|x-a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\|_F < \epsilon \\ \forall x \in A, \ \|x-a\|_E < \eta' \Longrightarrow \|f(x) - l'\|_F < \epsilon' \end{cases}$$

Prenons $\|x-a\|_E < \min(\eta, \eta')$. On a alors

$$\|f(x) - l\| < \epsilon \qquad \text{et} \qquad \left\|f(x) - l'\right\| < \epsilon'$$

Donc

$$3\epsilon = \left\|l - l'\right\|_F = \left\|l - f(x) + f(x) - l'\right\|_F \leq \|l - f(x)\|_F + \left\|f(x) - l'\right\|_F < 2\epsilon$$

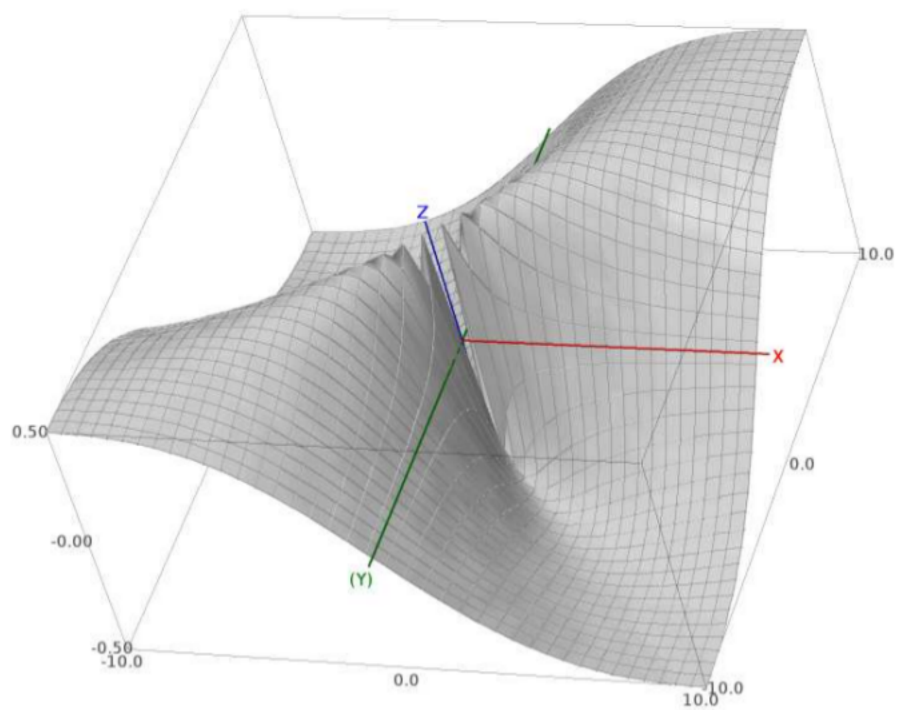
ce qui est absurde. Donc $l = l'$.

Exemple :

Reprenons l'exemple de fonction précédent

$$\begin{array}{llll} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

Dont la représentation graphique est la suivante

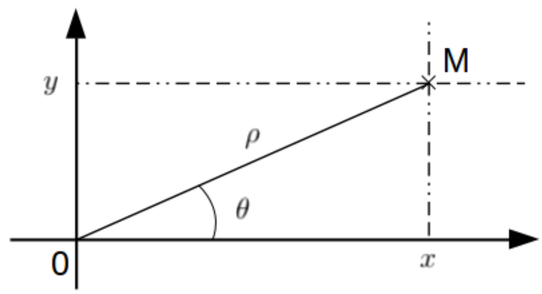


Etudions la limite de cette fonction en $a = (0,0)$. Pour cela, nous allons passer en coordonnées polaires

On montre aisément, à partir des définitions géométriques des fonctions cosinus et sinus, que

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

où $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\rho \in \mathbb{R}^*$.



On a donc

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \longrightarrow \tilde{f}(\rho,\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)$$

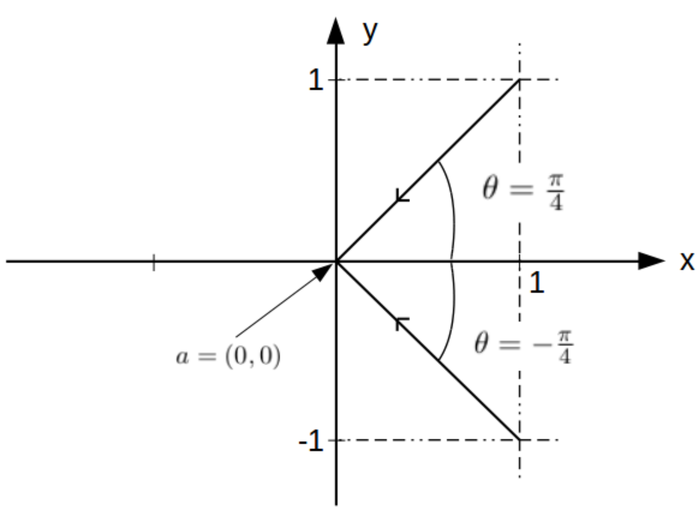
En coordonnée polaire le point $a = (0,0)$ devient $a = (\rho = 0, \theta)$. On peut alors s'approcher du point $a = (0,0)$ par différent chemin, c'est-à-dire différentes valeurs de θ. Par exemple pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\frac{\pi}{4})} \tilde{f}(\rho,\theta) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\frac{\pi}{4})} \cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}$$

Tandis que pour $\theta = -\frac{\pi}{4}$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,-\frac{\pi}{4})} \tilde{f}(\rho,\theta) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,-\frac{\pi}{4})} \cos(\theta)\sin(\theta) = -\frac{1}{2}$$

Les deux chemins suivis pour évaluer la limite sont représentés sur la figure suivante

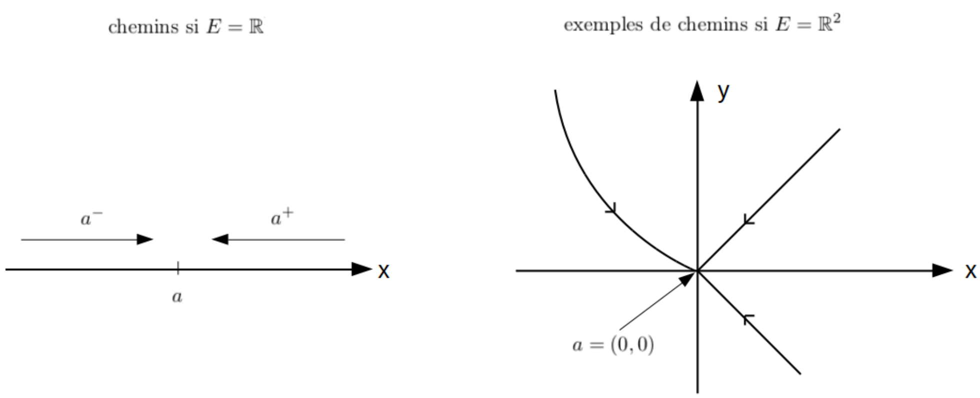


Finalement comme

$$\lim_{(\rho,\theta)\to(0,\frac{\pi}{4})} \tilde{f}(\rho,\theta) \neq \lim_{(\rho,\theta)\to(0,-\frac{\pi}{4})} \tilde{f}(\rho,\theta)$$

la fonction f n'admet pas de limite en $a = (0,0)$.

Remarque :
Sur cette exemple, on peut voir une différence fondamentale entre le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et celui des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. En effet, dans le premier cas, évaluer la limite en un point a quelconque revient seulement à s'approcher par deux chemins : par les x plus grands que a et les x plus petits que a. Mais dans le second cas, il existe en fait une infinité de chemins par lesquels on peut s'approcher de a.



et pour que la limite existe, il faut que tous les chemins par lesquels on peut s'approcher de a donne les mêmes limites.

Propriété 2 :

Changer les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ par des normes équivalentes ne change pas le fait que la limite existe ou non. Si de plus elle existe, elle reste inchangée.

Démonstration :
Soit E et F deux EVN munis tous les deux de deux normes équivalentes. Pour E les deux normes équivalentes sont $\|\cdot\|_{1,E}$ et $\|\cdot\|_{2,E}$. Il existe donc

$\alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x \in E$

$$\alpha \|x\|_{2,E} \leq \|x\|_{1,E} \leq \beta \|x\|_{2,E}$$

De même, pour F les deux normes équivalentes sont $\|\cdot\|_{1,F}$ et $\|\cdot\|_{2,F}$. Il existe donc $\gamma, \delta > 0$ tels que $\forall y \in F$

$$\gamma \|y\|_{2,F} \leq \|y\|_{1,F} \leq \delta \|y\|_{2,F}$$

Soit f une fonction allant de E dans F qui admet une limite $l \in F$ en $a \in E$ selon les normes $\|\cdot\|_{1,E}$ et $\|\cdot\|_{1,F}$. Donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in E,\ \|x-a\|_{1,E} < \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\|_{1,F} < \epsilon$$

Posons maintenant $\epsilon = \epsilon'/\delta$ et $\eta' = \eta/\alpha$. Alors

$$\|x-a\|_{1,E} < \eta \Longrightarrow \alpha \|x-a\|_{2,E} \leq \|x-a\|_{1,E} < \eta \Longrightarrow \|x-a\|_{2,E} < \frac{\eta}{\alpha} = \eta'$$

De même

$$\|f(x)-l\|_{1,F} < \epsilon \Longrightarrow \gamma \|f(x)-l\|_{2,F} \leq \|f(x)-l\|_{1,F} < \epsilon \Longrightarrow \|f(x)-l\|_{2,F} < \frac{\epsilon}{\gamma} = \epsilon'$$

Donc

$$\forall \epsilon' = \frac{\epsilon}{\gamma}, \exists \eta' = \frac{\eta}{\alpha} \ / \ \forall x \in E, \|x-a\|_{2,E} < \eta' \Longrightarrow \|f(x)-l\|_{2,F} < \epsilon'$$

Propriété 3 :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN et $A \subset E$. Soient f et g deux applications de A dand F, $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = l_2$$

Alors

$$\lim_{x \to a} f(x) + \lambda g(x) = l_1 + \lambda l_2 \qquad \text{pour } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Démonstration :
Par hypothèse, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1 \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in E, \|x-a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - l_1\|_F < \epsilon \\ \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2 \Longleftrightarrow \forall \epsilon' > 0,\ \exists \eta' > 0, \forall x \in E, \|x-a\|_E < \eta' \Longrightarrow \|f(x) - l_2\|_F < \epsilon' \end{cases}$$

Calculons maintenant $\|f(x)+\lambda g(x)-(l_1+\lambda l_2)\|_F$

$$\|f(x)+\lambda g(x)-(l_1+\lambda l_2)\|_F \leq \|f(x)-l_1\|_F + |\lambda|\,\|g(x)-l_2\|_F$$

Finalement, en posant $\epsilon'' = \epsilon + |\lambda|\epsilon'$ et $\eta'' = \min(\eta, \eta')$

$$\forall \epsilon'' > 0, \exists \eta'' > 0,\ \|x-a\|_E < \eta'' \Longrightarrow \|f(x)+\lambda g(x)-(l_1+\lambda l_2)\|_F < \epsilon''$$

Propriété 4 :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN. Soit $F \subset \mathbb{R}$ et $A \subset E$. Soient f et g deux applications de $A \longrightarrow F$. Soit $a \in \overline{A}$. f et g sont telles que

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = l_2$$

avec $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Alors

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = l_1 l_2$
2. Si $l_2 \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = l_1/l_2$

Démonstration : laissée en exercice

Propriété 5 :

Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Alors une application f de $E \longrightarrow F$ admet $l = (l_1, l_2, ..., l_p)$ comme limite lorsque x tend vers $a \in E$ si, et seulement si, pour tout entier $[\![1;p]\!]$, la ième "application composante" $f_i\ :\ E \longrightarrow \mathbb{R}$ de f admet l_i pour limite quand x tend vers a.

Démonstration : laissé en exercice

Exemple :
Soit l'application

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{xy}{x^2+y^2}\right) \end{array}$$

Etudions la limite en $a = (0,0)$ de cette fonction. D'après la propriété précédente, il suffit d'étudier la limite de chacune des applications composantes

$$\begin{array}{cccl} f_1 & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto f_1(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccl} f_2 & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

Même si nous avons déjà vu que f_2 n'admet pas de limite en $(0,0)$, ce qui est suffisant pour dire que f n'admet pas de limite en ce point, étudions f_1. Nous allons une fois de plus utiliser les coordonnées polaires. Posons donc

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^2} = 0 \quad \text{pour } \forall\theta$$

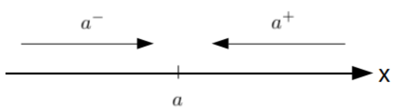
Donc la fonction composante f_1 admet bien une limite en $(0,0)$.

Définition 2 : (Application continue)

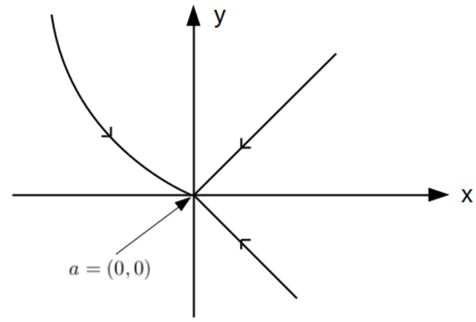
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soient $A \subset E$, f une application de $A \longrightarrow F$ et $a \in A$. On dit que f est continue en a si, et seulement si, f admet une limite en a. La fonction f est dite discontinue en a si, et seulement si, f n'est pas continue en a. La fonction est dite continue sur l'ensemble A si, et seulement si, elle est continue en tout point de A. On note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues de A dans F.

La continuité en un point quelconque a consiste donc à étudier si quelque soit le chemin par lequel on s'approche de a, la fonction tend vers la même valeur. Il s'agit également de la définition de la continuité en un point dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Mais dans le cas des fonctions de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on ne peut s'approcher que de deux façon du point : soit par les x plus grand soit par les x plus petit. La situation est beaucoup plus complexe dans le cas générale d'une fonction de $\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ puisqu'il y a alors une infinité de façon de s'approcher du point a (avec $p > 1$ un entier). Par exemple, si $p = 2$ et $a = (0,0)$, alors on peut s'approcher par tous les chemins du plan s'approchant de l'origine.

chemins si $E = \mathbb{R}$



exemples de chemins si $E = \mathbb{R}^2$



Théorème 1 : (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soient $A \subset E$, f une application de $A \longrightarrow F$ et $a \in \overline{A}$. Alors f admet une limite $l \in F$ quand x tend vers a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\Big(f(x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Démonstration : Admis

Corollaire : (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soient $A \subset E$, f une application de $A \longrightarrow F$ et $a \in \overline{A}$. Alors f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\Big(f(x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Exemple :
Soit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Prenons par exemple $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ alors clairement $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = (0,0)$. Or $f(u_n) = n^2/(2n^2) = 1/2$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$. Donc la fonction n'est pas continue en $(0,0)$.

3.2.1 Méthodologie

Nous résumons ici les méthodes à notre disposition pour la recherche de limite d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en $a = (x_0, y_0)$. On cherche donc à déterminer

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Etape 1 :
On calcule $f(x_0, y_0)$ et si on n'obtient pas une forme indeterminée ($0 \times \infty$, ∞/∞, $0/0$, $\infty - \infty$,...), alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Si on obtient une forme indeterminée, alors il faut lever l'indétermination et pour cela, vous devez passer à l'Etape 2.

Etape 2 :
Il y a dans cette deuxième étape plusieurs possibilités. Mais quelle que soit la méthode, l'objectif est de montrer : (i) soit que tous les chemins qui tendent vers a aboutissent à la même valeur et alors la fonction est continue en a et prend cette valeur (ii) soit il existe au moins deux chemins qui tendent vers a mais qui n'aboutissent pas à la même valeur de f et dans ce cas la fonction n'a pas de limite en a. Pour cela :

1. On peut passer en coordonnées polaires notamment si le dénominateur si prête bien (par exemple de la forme $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$). On pose alors

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho\cos(\theta) \\ y &= y_0 + \rho\sin(\theta) \end{aligned}$$

permettant d'introduire la fonction $\tilde{f}(\rho,\theta) = f(x,y)$. On a alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \tilde{f}(\rho,\theta)$$

Si le résultat ne dépend pas de θ alors la fonction f admet une limite donnée par $\lim\limits_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \tilde{f}(\rho,\theta)$. Cela correspond au cas où la valeur de

f ne dépend pas du chemin qui tend vers a. Si le résultat dépend de θ alors la fonction n'admet pas de limite en a car selon le chemin par lequel on tend vers a (c'est-à-dire selon la valeur de θ), la valeur de f est différente.

2. Si la fonction n'a pas la bonne forme pour passer en coordonnées polaires, on calcule explicitement la valeur de f pour différents chemins d'approche du point $a = (x_0, y_0)$. Pour cela, on a deux méthodes
   (a) Caractérisation séquentielle :
   Nous savons que si u_n est une suite d'éléments de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que
   $$\lim_{n\to\infty} u_n = (x_0, y_0)$$
   alors si f est continue, on a
   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f(u_n)$$
   On calcule alors cette limite pour différents chemins, c'est-à-dire pour différentes suites u_n.
   (b) Caractérisation cartésienne :
   On exprime les différents chemins par leur expression cartésienne qui sont de la forme $(x, \alpha(x))$ par exemple (où α est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

   Si deux chemins donnent des valeurs différentes, quelle que soit la méthode, alors la fonction f n'a pas de limite en a.
   Si, par contre, tous les chemins donnent la même valeur, alors cette valeur, notée l_c, est un bon candidat pour être la limite de la fonction. On passe alors à l'étape 3.

3. Il ne reste plus qu'à calculer $|f(x,y) - l_c|$. Si cette quantité tend vers 0 pour (x,y) tend vers (x_0, y_0) alors :

   — Si $|f(x,y) - l_c| \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$, alors $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l_c$

   — Sinon, la fonction n'admet aucune limite en (x_0, y_0)

Exemple 1 :
Soit la fonction $f_1(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ dont on cherche la limite en $(0,0)$.

Clairement $f_1(0,0) = 0/0$ est une forme indeterminée.

<u>coordonnées polaires</u>

On pose $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

d'où l'on déduit que

$$\tilde{f}_1(\rho,\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \tilde{f}_1(\rho,\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)$$

Finalement, on voit que

Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \frac{1}{2}$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$

<u>Caractérisation Séquentielle</u>

Soit $\begin{cases} u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ v_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$

On a bien

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = (0,0)$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} f_1(u_n) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_1(v_n) = 0$$

<u>Caractérisation Cartésienne</u>

Chemin 1: (x,x)

$$f_1(x,x) = \frac{1}{2}$$

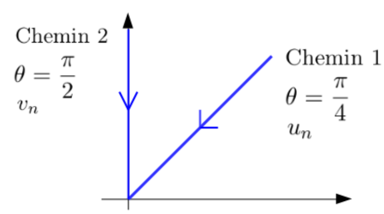
Chemin 2 : $(0,y)$

$$f_1(0,y) = 0$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f_1(x,y) = 1/2$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f_1(0,y) = 0$$



Exemple 2 :
Soit la fonction $f_2(x,y) = 1 + x^3/(x^2+y^2)$ dont on cherche la limite en $(0,0)$.

Clairement $f_2(0,0) = 0/0$ est une forme indeterminée.

coordonnées polaires

On pose $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

d'où l'on déduit que

$$\tilde{f}_2(\rho,\theta) = \rho\cos^3(\theta) + 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \tilde{f}_2(\rho,\theta) = 1$$

Finalement, on voit que la fonction est continue

Caractérisation Séquentielle

Soit $\begin{cases} u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ v_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \end{cases}$

On a bien

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = (0,0)$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} f_2(u_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(u_n) = 1$$

Mais on ne peut pas conclure

Caractérisation Cartésienne

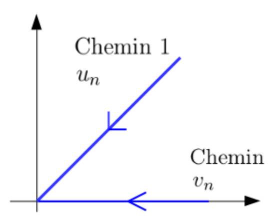
Chemin 1: (x,x)

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f_2(x,x) = 1$$

Chemin 2 : $(x,0)$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f_2(x,0) = 1$$

Mais on ne peut pas conclure



On ne peut pas conclure à partir des deux dernières méthodes. En effet, ce n'est pas parce que les deux chemins choisis donnent 1 que cela signifie que la fonction est continue. Pour conclure avec ces deux méthodes, on doit maintenant étudier $|f(x,y) - l_c|$ où $l_c = 1$.

$$|f(x,y) - l_c| = |f(x,y) - 1| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| \leq |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

finalement, avec les 3 méthodes, on aboutit bien à

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 1$$

3.3 Continuité uniforme

Définition 2 : (Continuité uniforme)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soient $A \subset E$, f une application de $A \longrightarrow F$ et $a \in A$. On dit que f est uniformément continue sur A si, et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall a \in A,\ \forall x \in A,\ \Big(\|x-a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon \Big)$$

On rappelle que la continuité classique (celle de la section précédente) sur l'ensemble A s'écrit

$$\forall a \in A,\ \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \Big(\|x-a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon \Big)$$

La différence entre la continuité uniforme sur l'ensemble A et la continuité sur l'ensemble A provient donc du fait que dans la continuité uniforme η est indépendant du point $a \in A$ considéré ; d'où le nom de continuité uniforme.

Propriété 6 :

Toute application uniformément continue est continue.

Démonstration :
C'est trivial. Soit f une application de $A \subset E$ dans F. Alors f est uniformément continue sur A si, et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall a \in A,\ \forall x \in A,\ \Big(\|x-a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon \Big)$$

qui implique évidemment la continuité

$$\forall a \in A,\ \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \Big(\|x-a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon \Big)$$

Définition 3 : (Application lipschitzienne)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite lipschitzienne si, et seulement si

$$\exists \kappa \geq 0,\ \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq \kappa \|x - y\|_E$$

On dit alors que f est κ-lipschitzienne de E dans F.

Remarque : en dimension finie, le caractère lipschitzien d'une application ne dépend pas des normes utilisées, par contre la valeur de κ, elle, en dépend.

Propriété 7 :

Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration :
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN et f une application κ-lipschitzienne de E dans F.

1. Si $\kappa = 0$ alors f est une fonction constante. Donc pour tout $a \in E$ et $\forall x \in E$, $\|f(x) - f(a)\|_F = 0 < \epsilon$. On conclut donc que f est uniformément continue.
2. Si $\kappa \neq 0$, alors posons $\eta = \epsilon/\kappa > 0$. Soit $a \in E$ et $x \in E$ tels que $\|x - a\|_E < \eta$. Alors $\|f(x) - f(a)\|_F \leq \kappa \|x - a\|_E < \kappa\eta = \epsilon$. On vient donc de montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall a \in E,\ \forall x \in E,\ \Big(\|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon \Big)$$

donc f est uniformément continue.

Propriété 8 :

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN. Alors l'application $\|\cdot\|_E$ est 1-lipschitzienne de E dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Démonstration :
f est donc ici l'application $\|\cdot\|_E$. Il suffit donc de montrer que

$$\exists \kappa \geq 0,\ \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ |\,\|x\|_E - \|y\|_E\,| \leq \kappa \|x-y\|_E$$

avec $\kappa = 1$. Or d'après la 2nd inégalité triangulaire, $\forall x, y \in E$, on a $|\,\|x\|_E - \|y\|_E\,| \leq \|x-y\|_E$. CQFD.

Théorème 2 : (théorème de Heine)

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue

Démonstration :
Raisonnons par l'absurde. Soit f une application continue et non uniformément continue sur un compact. Alors

$$\exists \epsilon_0 > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in A^2\ /\ \|x-y\|_E < \eta \text{ ET } \|f(x) - f(y)\|_F > \epsilon_0$$

Ainsi, en posant pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $\eta_n = 2^{-n}$, nous avons

$$\exists (x_n, y_n) \in A^2\ /\ \|x_n - y_n\|_E \leq 2^{-n} \text{ ET } \|f(x) - f(y)\|_F > \epsilon_0$$

Or A est un compact. Donc, il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $x \in A$. Or $\left\|x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}\right\| \leq 2^{-\phi(n)} \leq 2^{-n}$, ce qui implique que $y_{\phi(n)}$ converge également vers x. Ainsi, f étant continue, $(f(x_{\phi(n)}))$ et $(f(y_{\phi(n)}))$ convergent vers $f(x)$ d'où

$$\left\|f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})\right\|_F \longrightarrow 0$$

or c'est absurde puisque cela doit être supérieur à ϵ_0.

3.4 Topologie et fonctions continues

Afin de déterminer si un ensemble est un ouvert, un fermé ou un compact, il est également possible d'utiliser les fonctions continues à travers les deux théorèmes suivants

Théorème 3 : (Images réciproques d'ouverts, de fermés)

1. L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.
2. L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Démonstration :

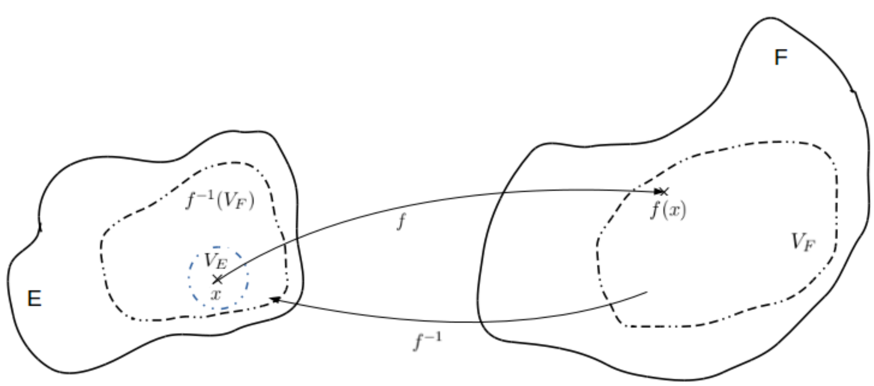
Soit f une application continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Commençons par rappeler que f est continue en a et de plus $f(a) = l$, si, et seulement si elle vérifie :

$$\forall V_F \in \mathcal{V}(l),\ \exists V_E \in \mathcal{V}_E(a),\ \forall x \in A,\ (x \in V_E \Longrightarrow f(x) \in V_F)$$

1. Soit V_F un ouvert de F. Soit $x \in f^{-1}(V_F)$: alors évidemment $f(x) \in V_F$. Or V_F est un ouvert, c'est donc un voisinage de $f(x)$. Par continuité :

   $$\exists V_E \in \mathcal{V}_E(x) \ / \ \forall x \in V_E,\ f(x) \in V_F$$

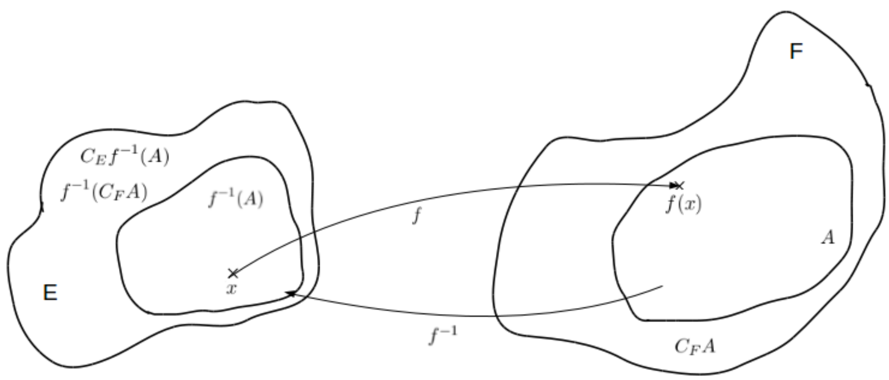
   Donc $V_E \subset f^{-1}(V_F)$. Comme V_E est un voisinage de x, cela signifie donc que $f^{-1}(V_F)$ l'est aussi. Comme cette démonstration reste vraie pour tout $f(x) \in V_F$, on conclue que $f^{-1}(V_F)$ est bien un ouvert.



2. Soit A un fermé de F. Alors

$$x \in C_E f^{-1}(A) \Longleftrightarrow f(x) \notin A \Longleftrightarrow f(x) \in C_F A \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C_F A)$$

d'où l'on déduit que $C_E f^{-1}(A) = f^{-1}(C_F A)$. Comme A est un fermé de F, $C_F A$ est un ouvert de F. Donc compte-tenu de 1., $f^{-1}(C_F A)$ est un ouvert de E. Donc $C_E f^{-1}(A)$ est un ouvert puisque $C_E f^{-1}(A) = f^{-1}(C_F A)$. Finalement $C_E C_E f^{-1}(A) = f^{-1}(A)$ est un fermé.



> Théorème 4 : (Image directe d'un compact)
>
> Soient $(E, \|\cdot\|)_E)$ et $(F, \|\cdot\|)_F)$ deux EVN. Soit f une application continue de E dans F, alors l'image direct d'un compact de E par f est un compact de F.

Démonstration :
Soit A un compact de E et f une application continue sur A. Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $f(A)$, alors pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in A$ telle que $b_n = f(a_n)$. A étant compact, il existe une suite extraite $a_{\phi(n)}$ convergente vers $a \in A$. Or f est continue donc $(b_{\phi(n)}) = (f(a_{\phi(n)}))$ converge vers $f(a) \in f(A)$. Donc $f(A)$ est un compact.

Chapitre 4

Calcul différentiel du 1er ordre

4.1 Objectifs du chapitre

L'objectif de ce chapitre est de généraliser des notions que vous avez étudié dans le cas des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et/ou de vous introduire rigoureusement des concepts que vous avez déjà utilisé en physique :

1. dérivée première $\longrightarrow$ dérivée partiel du premier ordre :

   En fait, vous avez déjà calculé en éléctromagnétisme et en thermodynamique des dérivées partielles. Considérons, par exemple, la fonction suivante

   $$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \Big(x+y, x^2-y^2, x^2y\Big) \end{array}$$

   Alors

   $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = (1, 2x, 2xy)$$
   $$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = (1, -2y, x^2)$$

   La première expression est obtenue en dérivant par rapport à x en fixant y (ou dit autrement, en considérant y comme une constante), tandis que la seconde expression est obtenue en dérivant par rapport à y en fixant x.

On introduira également la notion de gradient d'un champ scalaire que vous avez étudié en mécanique ($\vec{F} = -\vec{\nabla} V$) ou encore en électro-magnétisme. Considérons, par exemple, la fonction :

$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) = x^2 + xy \end{array}$$

Alors

$$\vec{\nabla} f = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x,y}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x,y} \right) = (y + 2x, x)$$

2. différentiabilité : il s'agit d'une notion que vous connaissez pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous allons l'étendre au cas de fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. On introduira alors les notions de différentielles, de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Nous généraliserons la notion d'équation différentielle d'ordre 1 en introduisons les équations aux dérivées partielles du 1er ordre

4.2 Dérivée partielle

Définition 1 : (Dérivée partielle)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soient $a \in \mathbb{R}^p$ et f une application de U dans F (où F est un EVN). Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On dit dit que f admet une dérivée partielle première en a par rapport à la jème variable si, et seulement si, l'application

$$\phi_j = \begin{cases} D_j \to F \\ \quad t \mapsto f(a + te_j) \end{cases}$$

est dérivable en 0 avec $D_j = \{t \in \mathbb{R} \ / \ a + te_j \in U\}$. On a alors :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_a = \phi_j'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

Remarque : la notation $\left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_a$ signifie que l'on calcule la dérivée de f par rapport à la jème variable au point a (ou que l'on évalue cette dérivée au point a). Il s'agit d'une notation plutôt utilisée par les physiciens. Les mathématiciens préfèrent utiliser la notation $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ou encore $\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}$

Exemple : Soit f l'application suivante

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = 3x^2 + xy - 2y^2 \end{array}$$

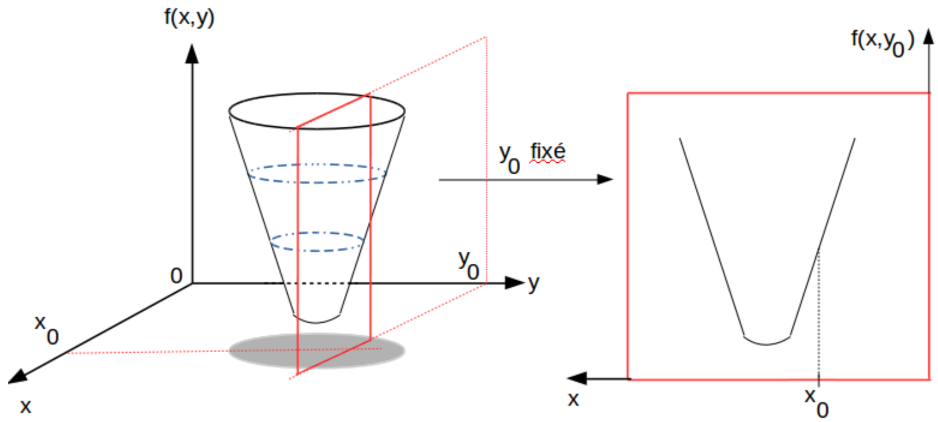
Déterminons les dérivées partielles d'ordre 1 en fonction de x et y en tout point (x,y).

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} &= \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((x,y)+(t,0)\Big) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f\Big(x+t,y\Big) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{3(x+t)^2 + (x+t)y - 2y^2 - 3x^2 - xy + 2y^2}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{3t^2 + 6xt + ty}{t} = \lim_{t\to 0} \big(3t + 6x + y\big) = 6x + y \end{aligned}$$

Ce qui est bien équivalent à fixer y et à dériver par rapport à x :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 6x + y$$

Signification graphique :
Discutons du sens de $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$. Pour cela, nous avons schématiquement représenté une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sur la figure suivante. Alors la dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0) revient à calculer la dérivée par rapport à x au point x_0 de la fonction $f(x, y_0)$. Graphiquement, cela signifie que l'on commence par prendre l'intersection du plan parallèle à xOz situé en $y = y_0$ avec la courbe $f(x,y)$. Cela permet d'obtenir $f(x,y_0)$. Il ne reste plus qu'à calculer la dérivée en x_0 de cette fonction $f(x,y_0)$.



En effectuant la même démarche que précédemment (soit en utilisant la définition soit en utilisant la technique de calcul qui consiste à fixer x et à dériver par rapport à y), on peut calculer la dérivée de f par rapport à y

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = x - 4y$$

Remarque Importante :

Une application dont toutes ses dérivées partielles sont définies en un certain point a, n'est pas nécessairement continues en ce point. Cela provient du fait que les dérivées partielles ne s'intéressent qu'à des directions portées par les vecteurs de la base canonique. Mais on peut s'approcher du point a par d'autres directions.

Illustrons cela à partir de la fonction

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

f n'est pas continue :

Prenons par exemple la suite $u_n = (1/n, 1/n)$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = (0,0)$. Or $f(u_n) = 1/2$. Donc $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = 1/2 \neq 0$. Donc la fonction f n'est pas continue en 0.

Les dérivées sont définies :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

Donc les dérivées partielles existent alors que la fonction n'est pas continue, cela vient du fait que la dérivée n'est définie que dans les directions x et y alors qu'il y a une infinité de façons de s'approcher du point $(0,0)$.

Propriété 1 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit f une application de $U \to \mathbb{R}^n$. f admet une dérivée première par rapport à la jème variable ($j \in [\![1;p]\!]$) si, et seulement si, pour $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_a$ est définie. Dans ce cas, on a

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = \left(\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\right|_a \; ; \; \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_j}\right|_a \; ; \; ... \; ; \; \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right|_a \right)$$

Démonstation :
Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors en toute généralité cette application peut s'écrire

$$\begin{array}{cccl} f & : & U \subset \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ & & (x_1,...,x_p) & \mapsto & f(x_1,...,x_p) = \Big(f_1(x_1,...,x_p) \; ; \; ... \; ; \; f_n(x_1,...,x_p)\Big) \end{array}$$

où les f_i, pour $i \in [\![1;p]\!]$, sont les applications composantes qui vont de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Alors, étudions la dérivée par rapport à x_j (variable portée par le vecteur canonique e_j). On doit donc calculer la dérivée au point $a \in U$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{f_1(a+te_j)-f_1(a)}{t}\ ;\ ...\ ;\ \frac{f_n(a+te_j)-f_n(a)}{t}\right)\end{aligned}$$

Or comme nous l'avons vu au chapitre précédent (Propriété 5 du chapitre "Limite et Applications Continues"), on a

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}\\ &= \left(\lim_{t\to 0}\frac{f_1(a+te_j)-f_1(a)}{t}\ ;\ ...\ ;\ \lim_{t\to 0}\frac{f_n(a+te_j)-f_n(a)}{t}\right)\\ &= \left(\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\right|_a\ ;\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_j}\right|_a\ ;\ ...\ ;\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right|_a\right)\end{aligned}$$

4.3 Fonctions différentiables sur un ouvert

4.3.1 Généralités

Définition 2 : (Fonction différentiable)

Soit U un ouvert de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_p)$. Soit $a \in U$. Soit f une application de U dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Soit U_0 l'ensemble définie par

$$U_0 = \{h \in \mathbb{R}^p\ /\ a+h \in U\}$$

On dit que f est différentiable en a si, et seulement si, il existe une **application linéaire** l de $\mathbb{R}^p$ dans F et une application ϵ de U_0 dans F telles que :

1. $\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^p}} \epsilon(h) = 0_F$
2. $\forall h \in U_0,\ f(a+h) = f(a) + l(h) + \|h\|_p\,\epsilon(h)$

Le second point est le développement limité à l'ordre 1 de f en a. On dit que f est différentiable sur U si, et seulement si, f est différentiable en tout point de U.

Théorème 1 : (différentielle)

Soit U un ouvert de $E = (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_E)$. Soit $a \in U$. Soit f une application de U dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Si f est différentiable en a alors l'application l est unique. Cette application est appelé différentielle de f en a et est notée $D_a f$.

Démonstration :
On rappelle que U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et F un EVN. Soit f une application de U dans F. Soit $U_0 = \{h \in \mathbb{R}^p \ / \ a + h \in U\}$ où $a \in \mathbb{R}^p$.

Postulons que f possède 2 différentielles l_1 et l_2 en a. On a donc

$$\begin{cases} \forall h \in U_0, \ f(a+h) = f(a) + l_1 + \|h\|_E \, \epsilon_1(h) \\ \text{avec } \lim\limits_{h \to 0_E} \epsilon_1(h) = 0_F \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \forall h \in U_0, \ f(a+h) = f(a) + l_2 + \|h\|_E \, \epsilon_1(h) \\ \text{avec } \lim\limits_{h \to 0_E} \epsilon_2(h) = 0_F \end{cases}$$

alors $\forall h \in U_0$, on a

$$0_F = l_1(h) - l_2(h) + \|h\|_E \Big(\epsilon_1(h) - \epsilon_2(h)\Big)$$

et enfin dernier rappel, comme U est un ouvert, $\exists r > 0 \ / \ B(a, r) \subset U$.

Etape 1 : Etude de $l_1(h) - l_2(h)$ dans la boule ouverte $B(0_E, r)$.

$\longrightarrow$ Si $h_0 \in B(0_E, r)$ alors $x_0 = a + h_0 \in B(a, r) \subset U$ et $h_0 \in U_0$.
démo :

$$h_0 \in B(0_E, r) \Longleftrightarrow \|h_0\|_E < r$$

alors

$$\|x_0 - a\|_E < r \Longrightarrow \|h_0\|_E < r \qquad \text{si } x_0 = a + h_0$$

or

$$B(a, r) \subset U \qquad \text{donc} \qquad x_0 \in B(a, r) \subset U$$

et finalement puisque $x_0 = a + h_0 \in U$ alors $h_0 \in U_0$.

$\longrightarrow$ Montrons que pour $\forall t \in [0,1]$, $th_0 \in U_0$:
démo :
On a $\|h_0\|_E < r$. Donc pour $\forall t \in [0,1]$

$$\|(a+th_0)-a\|_E = \|th_0\|_E = t\,\|h_0\|_E < r$$

Donc $a+th_0 \in B(a,r) \subset U$ donc $a+th_0 \in U$ donc $th_0 \in U_0$.

$\longrightarrow$ Donc pour $\forall t \in [0,1]$:

$$0_F = l_1(th_0) - l_2(th_0) + \|th_0\|_p \Big(\epsilon_1(th_0) - \epsilon_2(th_0)\Big)$$

Par linéarité de l_1 et l_2, on a

$$0_F = t\Big(l_1(h_0) - l_2(h_0)\Big) + t\,\|h_0\|_E \Big(\epsilon_1(th_0) - \epsilon_2(th_0)\Big)$$

Pour $t \neq 0$, on peut simplifier par t

$$0_F = l_1(h_0) - l_2(h_0) + \|h_0\|_E \Big(\epsilon_1(th_0) - \epsilon_2(th_0)\Big)$$

or

$$\lim_{t\to 0} th_0 = 0_E \Longrightarrow \lim_{t\to 0} \epsilon_1(th_0) = \lim_{t\to 0} \epsilon_2(th_0) = 0_F$$

Donc pour $\forall h_0 \in B(0_E,r)$, on a

$$0_F = l_1(h_0) - l_2(h_0)$$

Donc sur $B(0_E,r)$, les fonctions l_1 et l_2 sont identiques.

Etape 2 : Généralisation du résultat sur $E = \mathbb{R}^p$.

Soit $h \in E$.
$\longrightarrow$ Si $h = 0_E$ alors $h \in B(0_E,r)$ donc $l_1 = l_2$ compte tenu de l'étape 1.

$\longrightarrow$ Si $h \neq 0_E$. On pose

$$\tilde{h} = \frac{r}{2}\frac{h}{\|h\|_E}$$

d'où l'on déduit que

$$\left\|\tilde{h}\right\|_E = \frac{r}{2} < r \qquad h = \frac{2\,\|h\|_E}{r}\tilde{h}$$

On voit donc que $\tilde{h} \in B(0_E, r)$.

$$l_1(\tilde{h}) = l_2(\tilde{h}) \Longleftrightarrow l_1\left(\frac{r}{2}\frac{h}{\|h\|_E}\right) = l_2\left(\frac{r}{2}\frac{h}{\|h\|_E}\right)$$

Par linéarité de l_1 et l_2, on obtient alors

$$l_1(h) = l_2(h)$$

Propriété 2 :

Toute application linéaire ϕ de $\mathbb{R}^p$ dans un EVN quelconque F est différentiable et pour $\forall a \in \mathbb{R}^p$, $D_a\phi = \phi$

Démonstration :
ϕ est linéaire. Donc, $\forall a, h \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\phi(a+h) = \phi(a) + \phi(h) + 0_F$$

on a donc juste à poser que $D_a\phi = \phi$ et $\epsilon(h) = 0_F$.

Propriété 3 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$ et f une application de $U \to F$. Si f est différentiable en a, alors, ses dérivées partielles premières par rapport à toutes ses variables sont définies en a et sa différentielle en ce point est donnée par

$$\begin{array}{rccl} D_a f & : & \mathbb{R}^p & \to & F \\ & & h = (h_1, ..., h_p) & \mapsto & D_a f(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a \end{array}$$

Démonstration :
f est différentiable par hypothèse. Etudions tout d'abord les dérivées

$$\forall j \in [\![1; p]\!] \; : \; \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

Or f est différentiable. Il existe donc une différentielle $D_a f$ telle que

$$f(a+te_j) = f(a) + D_a f(te_j) + \|te_j\| \, \epsilon(te_j)$$

Donc

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = \lim_{t\to 0} \frac{D_a f(te_j) + \|te_j\| \, \epsilon(te_j)}{t} = \lim_{t\to 0} \Big(D_a f(e_j) + \|e_j\| \, \epsilon(te_j) \Big)$$

donc

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = D_a f(e_j)$$

Prenons donc

$$h = (h_1, h_2, ..., h_p) = \sum_{i=1}^{p} h_i e_i$$

Alors par linéarité de $D_a f$ on a

$$D_a f(h) = D_a f(\sum_{i=1}^{p} h_i e_i) = \sum_{i=1}^{p} h_i D_a f(e_i)$$

$$D_a f(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a$$

Remarque :
l'expression $D_a f(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a$ doit normalement vous rappeler quelque chose... de la physique... plus précisément de la thermodynamique. Soit U l'énergie interne d'un système. U dépend de la température et du volume par exemple $\Longrightarrow U(T, V)$. La différentielle de U au point(T_0, V_0) est alors donnée par

$$dU(T_0, V_0) = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{T_0, V_0} dT + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{T_0, V_0} dV \tag{4.1}$$

L'expression précédente est strictement identique à l'expression $D_a f(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a$. Pour voir cela, il suffit de poser les notations suivantes

$$\begin{array}{ccl} U & \longrightarrow & f \\ (T, V) & \longrightarrow & (x_1, x_2) \\ (T_0, V_0) & \longrightarrow & a \\ dU & \longrightarrow & D_a f \\ (dT, dV) & \longrightarrow & h = (h_1, h_2) \end{array}$$

En TD, nous utiliserons la physique (et plus particulièrement le calcul d'incertitude) afin d'obtenir une vision intuitive de ce qu'est une différentielle. Nous montrerons ainsi que la differentielle $D_a f(h)$ correspond à la variation de la fonction f au point a lorsque l'on se déplace du vecteur h à partir du point a (ceci est d'autant plus juste que h tend vers 0_E). Ceci est d'ailleurs complètement contenu dans l'expression utilisée dans la définition d'une différentielle (définition 2)

$$\begin{array}{l} \forall h \in U_0,\ f(a+h) = f(a) + D_a f(h) + \|h\|_E\, \epsilon(h) \\ \text{avec } \lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0_F \end{array}$$

Dans le cas de l'expression (4.1), l'interprétation se formule de la façon suivante : il s'agit de la variation d'énergie interne U lorsque la température passe de T_0 à $T_0 + dT$ et le volume passe de V_0 à $V_0 + dV$ (et ceci est d'autant plus juste que dT et dV sont proches de 0).

Propriété 4 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN. Soit f une application de $U \to F$. Alors si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Démonstation :

On rappelle que f différentiable en a signifie que

$$\forall h = (h_1, ..., h_p) \in U_0 \text{ avec } U_0 = \{h \in \mathbb{R}^p \ / \ a + h \in U\}$$

on a

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a + \|h\|_E \, \epsilon(h)$$

En prenant la norme de l'expression précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\|f(a+h) - f(a)\|_F &= \left\| \sum_{j=1}^{p} h_j \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a + \|h\|_E \, \epsilon(h) \right\|_F \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{p} h_j \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a \right\|_F + \| \|h\|_E \, \epsilon(h) \|_F \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} |h_j| \left| \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a \right| + \|h\|_E \, \|\epsilon(h)\|_F
\end{aligned}$$

Or les termes de droite tendent vers 0 lorsque h tend vers 0_E puisque $\epsilon(h)$ tend vers 0_F et que les termes $\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a$ sont bien définies car f est différentiable. Donc finalement

$$\lim_{h \to 0_E} f(a+h) = f(a)$$

ce qui montre (puisque h est quelconque dans la limite précédente) que f est continue en a.

On peut maintenant se demander comment savoir si une application est différentiable (c'est-à-dire si elle admet une différentielle dont l'expression est donnée dans la propriété précédente) ? Nous allons répondre ici à cette question dans le cas particulier d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans un EVN quelconque.

Théorème 2 : (Différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in U$. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN. Et enfin, soit f une application de U dans F. Alors f est différentiable en (x, y), si, et seulement si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f\big(x+h_1, y+h_2\big)-f(x,y)-h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}-h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right)=0_F$$

Où la norme utilisée n'a pas d'influence sur le résultat final.

Démonstration :

— Commençons par montrer que si f différentiable alors elle vérifie l'expression précédente :

  Si f est différentiable au point (x, y) alors il existe $D_{(x,y)}f(h_1, h_2)$ donnée par

$$D_{(x,y)}f(h_1,h_2) = h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} + h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}$$

  telle que

$$f(x+h_1,y+h_2) = f(x,y)+h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}+h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}+\|(h_1,h_2)\|\,\epsilon(h_1,h_2)$$

  avec $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon(h_1, h_2) = 0_F$. Donc

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f\big(x+h_1,y+h_2\big)-f(x,y)-h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}-h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right)$$
$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon(h_1,h_2) = 0_F$$

— Montrons maintenant que si f vérifie l'expression précédente alors f est différentiable :

Par hypothèse, on a donc

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f\big(x+h_1,y+h_2\big)-f(x,y)-h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}-h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right)=0_F$$

posons donc

$$\epsilon(h_1,h_2)=\frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f\big(x+h_1,y+h_2\big)-f(x,y)-h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}-h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right) \tag{4.2}$$

qui a bien la propriété que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon(h_1,h_2)=0_F$$

Et il ne reste plus qu'à réarranger les termes dans l'expression (4.2)

$$f\big(x+h_1,y+h_2\big)=f(x,y)+h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}+h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}+\|(h_1,h_2)\|\,\epsilon(h_1,h_2)$$

qui est bien la définition d'une différentielle.

4.3.2 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Déninition 3 : (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $(F,\|\cdot\|_F)$ un EVN. Soit f une application de U dans F. Alors f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, toutes les fonctions dérivées partielles premières de f sont définies et continues en tout point $a\in U$. On note $\mathcal{C}^1(U,F)$ l'ensemble des applications de U dans F de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Commençons par donner un exemple de fonction qui est de classe $\mathcal{C}^1$.

Propriété 5 :

Toute application ϕ linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

Démonstration :
Soit $\{e_i\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Alors, si $a \in \mathbb{R}^p$:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_a = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\phi(a + te_i) - \phi}{t} \right) = \lim_{t \to 0} \phi \left(\frac{a + te_i - a}{t} \right) = \phi(e_i)$$

Donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, les dérivées partielles sont définies.

De plus, la fonction

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} & : & \mathbb{R}^p & \to & F \\ & & a & \mapsto & \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_a = \phi(e_i) \end{array}$$

est clairement continue et même constante sur $\mathbb{R}^p$.

Donc ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

L'intérêt d'introduire cette notion provient du théorème suivant :

Théorème 3 :

Soit U un ouvert de $E = \mathbb{R}^p$. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN. Soit f une application de U dans F. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors

1. f est différentiable sur U.
2. f est continue sur U.

Démonstration :

1. Admis
2. Si f est $\mathcal{C}^1$ alors f est différentiable sur U. Comme f est différentiable sur U alors f est continue sur U (propriété 4).

Le lien entre différentiabilité, classe $\mathcal{C}^1$, continuité de f et existence des dérivées premières de f peut être résumé par le schéma suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & & f \text{ est continue en } a \in U \\
f \in \mathscr{C}^1(U;F) \arrow[r, Rightarrow] & f \text{ est différentiable en } a \in U \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & & f \text{ admet toutes ses dérivées partielles en } a
\end{tikzcd}
$$

Attention :

1. si f est $\mathcal{C}^1$ en a, alors par définition de ce qu'est la classe $\mathcal{C}^1$ les dérivées premières, en a, sont définies et continues.
2. si f n'est que différentiable en a alors les dérivées premières sont définies mais pas continues

Illustration :

Soit la fonction

$$
\begin{array}{rcl}
f \ : \ U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\
(x,y) & \mapsto & f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}
\end{array}
$$

$\longrightarrow f_1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

En effet, si $(x,y) = (0,0)$ alors

$$|f(x,y)| = \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq |x^2+y^2| \longrightarrow 0$$

donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$\longrightarrow$ Etudions maintenant la différentiabilité :

Une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable, en (x,y), si, et seulement si :

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f\big(x+h_1,y+h_2\big)-f(x,y)-h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}-h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right)=0_F$$

Vérifions que cette fonction est différentiable en $(0,0)$. Pour cela calculons tout d'abord les dérivées partielles

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(t^2\sin\frac{1}{|t|}-0\Big)\\ &= \lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{|t|} = 0 = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left((h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

qui tend vers 0. Donc f est différentiable en $(0,0)$.

$\longrightarrow$ Mais les dérivées ne sont pas continue en $(0,0)$:

Pour cela calculons la dérivée par rapport à x en (x,y) quelconque

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Donc la dérivée première par rapport à x est donnée

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Or, en prenant $u_n=(1/n,0)$, alors

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{u_n} &= \frac{2}{n}\sin(n)-\frac{1}{n}(n^2)^{3/2}\cos(n)\\ &= \frac{\sin n}{n}-n^2\cos(n)\end{aligned}$$

qui ne converge pas et donc qui ne converge pas vers 0. Donc la fonction n'est pas $\mathcal{C}^1$. De plus, on peut voir, sur cet exemple, que f est continue en

$(0,0)$, les dérivées partielles premières en $(0,0)$ existent mais elles ne sont pas continues.

Dans la suite, la structure algébrique des fonctions $\mathcal{C}^1$ va nous être très utile pour l'étude des $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (changement de variables) et la résolution des équations aux dérivées partielles. Nous allons donc la préciser ici :

Théorème 4 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit F un EVN quelconque. L'ensemble $\mathcal{C}^1(U,F)$ est un sous espace vectoriel des fonctions continues de U dans F, c'est-à-dire de $\mathcal{C}(U,F)$.

Démonstration :

1. La fonction nulle est le 0 de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(U,F)$. Or la fonction nulle a pour dérivées partielles la fonction nulle. Donc la fonction nulle a ses dérivées partielles continues. Finallement la fonction nulle apprtient à $\mathcal{C}^1(U,F)$.

2. De plus pour $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathcal{C}^1(U,F)$, $f+\lambda g$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur U car la somme de fonctions continues et continues et de même pour la dérivée (laissé en exercice). Donc $f+\lambda g \in \mathcal{C}^1(U,F)$

Théorème 5 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit F un EVN quelconque. Alors, pour $\forall f, g \in \mathcal{C}^1(U,F)$, $f \times g \in \mathcal{C}^1(U,F)$.

Démonstration : exercice.

Théorème 6 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathcal{R}^q$. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et g une application de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}^n$. Si $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Démonstration : Admis.

4.3.3 Composition et changement de variables

Nous allons maintenant introduire deux propriétés qui nous seront capitales afin de résoudre les équations aux dérivées partielles.

Propriété 6 :

Soit $f \; : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. Soient $u_1,\ u_2, ...,\ u_n$, n fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telles que pour $\forall t \in I$, $\Big(u_1(t)\ ;\ u_2(t)\ ; ...;\ u_n(t)\Big) \in U$.

Alors la fonction

$$\begin{array}{cccl} g & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & g(t) = f\Big(u_1(t)\ ;\ u_2(t)\ ; ...;\ u_n(t)\Big) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de plus, $\forall t \in I$

$$g'(t) = u_1'(t)\ \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{u_1(t),...,u_n(t)} + ... + u_n'(t)\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_{u_1(t),...,u_n(t)}$$

Remarque :
La formule précédente est l'analogue de la formule $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Démonstration :

Nous allons faire la démonstration pour une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, nous pouvons écrire les développements limités à l'ordre 1 des fonctions f, u_1 et u_2 en un point quelconque t_0 et (x_0, y_0)

$$u_1(t_0+h) = u_1(t_0) + hu_1'(t_0) + h\epsilon_1(h)$$
$$u_2(t_0+h) = u_2(t_0) + hu_2'(t_0) + h\epsilon_1(h)$$
$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + h_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} + h_2 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} + \|(h_1,h_2)\|\, \epsilon_3(h_1,h_2)$$

De plus

$$\left\|\Big(u_1'(t_0)\ h + h\epsilon_1(h)\ ;\ u_2'(t_0)\ h + h\epsilon_2(h)\Big)\right\| = |h|\ \left\|\Big(u_1'(t_0) + \epsilon_1(h)\ ;\ u_2'(t_0) + \epsilon_2(h)\Big)\right\|$$

donc lorsque t tend vers 0, la norme précédente tend également vers 0. On peut donc poser

$$h_1 = u_1'(t_0)h + h\epsilon_1(h)$$
$$h_2 = u_2'(t_0)h + h\epsilon_2(h)$$

puisque $\|(h_1,h_2)\|$ doit tendre vers 0. On peut maintenant écrire

$$\begin{aligned} g(t_0+h) &= f\Big(u_1(t_0+h)\ ;\ u_2(t_0+h)\Big) \\ &= f\Big(u_1(t_0) + u_1'(t_0)h + h\epsilon_1(h)\ ;\ u_2(t_0) + u_2'(t_0)h + h\epsilon_2(h) Big) \\ &= f\Big(u_1(t_0) + h_1\ ;\ u_2(t_0) + h_2\Big) \end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser le développement à l'ordre 1 de la fonction f :

$$g(t_0+h) = f\Big(u_1(t_0), v_1(t_0)\Big) + h_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)} + h_2 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)} + \|(h_1,h_2)\|\, \epsilon_3(h_1,h_2)$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} g(t_0+h) = g(t_0) &+ h\left(u_1'(t_0) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)} + u_2'(t_0) \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)}\right) \\ &+ h\left(\epsilon_1(h) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)} + \epsilon_2(h) \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)}\right) + |h|\ \|(h_1,h_2)\|\, \epsilon_3(h_1,h_2) \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\epsilon(h) = \epsilon_1(h) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)} + \epsilon_2(h) \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)} + |h|\ \|(h_1,h_2)\|\, \epsilon_3(h_1,h_2)$$

qui tend bien vers 0 quand h tend vers 0. Finalement

$$g(t_0+h) = g(t_0)+h\left(u_1'(t_0)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)} + u_2'(t_0)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)}\right)+h\epsilon(h)$$

On peut donc conclure, puisque le deuxième terme du développement limité d'ordre 1 est la dérivée $g'(t_0)$

$$g'(t_0) = u_1'(t_0)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)} + u_2'(t_0)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{u_1(t_0),u_2(t_0)}$$

Propriété 7 :

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$. Soient g_1 et g_2 deux applications de V dans $\mathbb{R}$. f, g_1 et g_2 sont $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition respectif. Pour $\forall(u,v) \in V$, $\Big(g_1(u,v), g_2(u,v)\Big) \in U$. Alors la fonction

$$\begin{array}{rcccl} h & : & V & \to & \mathbb{R} \\ & & (u,v) & \mapsto & h(u,v) = f\Big(g_1(u,v)\ ;\ g_2(u,v)\Big) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et de plus, $\forall(u,v) \in V$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_1}{\partial u}\right|_{u,v} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_2}{\partial u}\right|_{u,v} \\ \\ \left.\frac{\partial h}{\partial v}\right|_{u,v} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_1}{\partial v}\right|_{u,v} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_2}{\partial v}\right|_{u,v} \end{array}\right.$$

Démonstration :
Nous n'allons montrer ici que la première égalité, la seconde se démontrant strictement de la même façon. Pour la première égalité, on cherche à exprimer

$$\left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v}$$

en fonction des dérivées de g_1 et g_2. Or, prendre la dérivée partielle de h par rapport à u revient à étudier la variation de h en fonction de u lorsque v est fixé. Introduisons donc les fonctions

$$g_1^v(u) = g_1(u,v)$$
$$g_2^v(u) = g_2(u,v)$$

Etudions maintenant la fonction H définie par $H(u) = h(u,v) = f(g_1^v(u) \; ; \; g_2^v(u))$. La fonction H est $\mathcal{C}^1$ pour tout u puisque f, g_1 et g_2 sont $\mathcal{C}^1$. De plus, d'après la propriété 6

$$H'(u) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{g_1^v(u),g_2^v(u)} (g_1^v)'(u) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{g_1^v(u),g_2^v(u)} (g_2^v)'(u)$$

or

$$(g_1^v)'(u) = \left.\frac{\partial g_1}{\partial u}\right|_{u,v}$$
$$(g_2^v)'(u) = \left.\frac{\partial g_2}{\partial u}\right|_{u,v}$$

et finalement

$$\left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_1}{\partial u}\right|_{u,v} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_2}{\partial u}\right|_{u,v}$$

Remarque :

Posons, dans la propriété 7, $g(u,v) = \big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)$ qui est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur V. Alors : $h(u,v) = (f \circ g)(u,v)$ où f est la fonction : $(x,y) \mapsto f(x,y)$. On voit donc que la propriété 7 permet en fait de calculer les dérivées partielles de h par rapport à u ou v (qui sont les variables naturelles de h) connaissant les dérivées partielles de f par rapport à x et y (qui sont les variables naturelles de f). Nous verrons que cela nous sera particulièrement utile pour résoudre des équations aux dérivées partielles par changement de variables (qui est la seule méthode que nous verrons cette année pour les résoudre). Pour illustrer ce qui vient d'être dit, considérons par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto f(x,y) = 2x^2y + y^2 + x \end{array}$$

Et, proposons d'introduire les fonctions suivantes (qui jouent le rôle de g_1 et g_2)

$$\begin{cases} x(u,v) = u + v \\ y(u,v) = u - v \end{cases}$$

On peut alors introduire la fonction h définie par $h(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ et calculer les dérivées de cette fonction h par rapport à u et v en utilisant les dérivées de f par rapport à x.

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial u}\Big|_{u,v} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x,y} \frac{\partial x}{\partial u}\Big|_{u,v} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x,y} \frac{\partial y}{\partial u}\Big|_{u,v} \\ \frac{\partial h}{\partial v}\Big|_{u,v} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x,y} \frac{\partial x}{\partial v}\Big|_{u,v} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x,y} \frac{\partial y}{\partial v}\Big|_{u,v} \end{cases}$$

ce qui donne, en faisant le calcul explicitement

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial u}\Big|_{u,v} = (4xy+1) \times 1 + (2x^2+2y) \times 1 \\ \frac{\partial h}{\partial v}\Big|_{u,v} = (4xy+1) \times 1 + (2x^2+2y) \times (-1) \end{cases}$$

or $x = u + v$ et $y = u - v$, donc

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial u}\Big|_{u,v} = 6u^2 - 2v^2 + 2u - 2v + 4uv + 1 \\ \frac{\partial h}{\partial v}\Big|_{u,v} = 2u^2 - 6v^2 + 1 - 2u + 2v - 4uv \end{cases} \tag{4.3}$$

On peut vérifier le résultat précédent, en faisant le calcul explicite de la fonction $h(u,v)$, ainsi en utilisant que $h(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ avec $x(u,v) = u + v$ et $y(u,v) = u - v$, on obtient

$$\begin{aligned} h(u,v) &= 2(u+v)^2(u-v) + (u-v)^2 + u + v \\ &= 2u^3 - 2v^3 + 2u^2v - 2v^2u + u^2 + v^2 - 2uv + u + v \end{aligned}$$

puis en calculant explicitement $\frac{\partial h}{\partial u}\Big|_{u,v}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}\Big|_{u,v}$ on réobtient bien les expressions (4.3).

4.3.4 Matrice de Jacobi, gradient et inégalité des accroissements finis

Nous allons ici introduire la notion de matrice de Jacobi, nous verrons que dans les changements de variables, elle joue un rôle primordial (suite de ce cours et "cours d'intégration & probabilité" du second semestre). La matrice de Jacobi nous permettra ensuite d'introduire un opérateur que vous avez déjà rencontré en physique : le gradient. Enfin, nous relirons le gradient à l'inégalité des accroissements finis.

Définition 4 : (Matrice de Jacobi)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et f une application, différentiable en a, de U dans $\mathbb{R}^n$. On définit la matrice de Jacobi (ou matrice jacobienne) de f en a, notée $J_f(a)$, la matrice à n lignes et p colonnes de $D_f(a)$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire la matrice

$$J_f(a) = \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_a \right) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_p}\right|_a \\ . & . & . \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_p}\right|_a \end{pmatrix}$$

Si $n = p$, on appelle jacobien de f en a, le déterminant de la matrice $J_f(a)$ de f en a.

Introduisons maintenant le gradient :

Définition 5 : (Gradient)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et f une application, différentiable en a, de U dans $\mathbb{R}$. On définit alors le gradient de f en a, noté $\overrightarrow{grad}(f)(a)$ ou $\vec{\nabla}_a f$, par

$$\vec{\nabla}_a f = {}^tJ_f(a) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a \\ . \\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_p}\right|_a \end{pmatrix}$$

Propriété 8 : (gradient et différentielle)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application, différentiable en $a \in U$, de U dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\forall (a,h) \in U^2,\ D_a f(h) = \vec{\nabla}_a f \cdot h$$

où $\vec{\nabla}_a f \cdot h$ est le produit scalaire entre les deux vecteurs.

Démonstration :

$$\vec{\nabla}_a f \cdot h = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a \ ; \ \dots \ ; \ \left.\frac{\partial f}{\partial x_p}\right|_a \right) \ \cdot \ (h_1 \ ; \ \dots \ ; \ h_p) = \sum_{i=1}^{p} h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a$$

Propriété 9 : (interprétation du gradient)

Le gradient d'une fonction f, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, est un vecteur perpendiculaire aux directions où f est constante et pointant dans la direction où la variation de f est maximale (de plus grande pente). La norme du gradient est d'autant plus grande qu'au point où il est calculé, la variation de f est grande.

Démonstration :
Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit a un point de $\mathbb{R}^n$.

1. Considérons le point $p(t) = a + tv$ où $t \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^n$ telle que $p(t) \in U$ et $v \cdot \vec{\nabla}_a f = 0$ (le vecteur v est donc orthogonal au vecteur gradient de f en a. Alors d'après la propriété 6
$$\left.\frac{d}{dt} f\big(p(t)\big)\right|_{t=0} = \vec{\nabla}_a f \cdot p'(t=0) = \vec{\nabla}_a f \cdot v = 0$$
On voit donc que si l'on se déplace orthogonalement à $\vec{\nabla}_a f$ alors f est constante. La réciproque se démontre par le même raisonnement.
2. Considérons maintenant le point $p(t) = a + t\vec{\nabla}_f a$ où $t \in \mathbb{R}$. Alors d'après la propriété 6
$$\left.\frac{d}{dt} f\big(p(t)\big)\right|_{t=0} = \vec{\nabla}_a f \cdot p'(t=0) = \vec{\nabla}_a f \cdot \vec{\nabla}_a f = \left\|\vec{\nabla}_a f\right\|^2 > 0$$
On voit donc que plus la norme du gradient de f en a est grande et plus la variation de f est grande.
3. Considérons le point $p(t) = a + tv$ où $t \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^n$ telle que $\|v\| = 1$. Alors d'après la propriété 6
$$\left.\frac{d}{dt} f\big(p(t)\big)\right|_{t=0} = \vec{\nabla}_a f \cdot v$$

ce produit scalaire est maximum si, et seulement si v est colinéaire et dans le même sens que $\vec{\nabla}_a f$. Donc $\vec{\nabla}_a f$ indique la direction de plus grande pente

Nous allons maintenant généralisé le théorème des accroissements finis que vous avez étudié dans le case des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 7 : (inégalité des accroissements finis)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit a et b deux points de U tels que $[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b / \lambda \in [0,1]\} \subset U$. Si il existe un réel M tel que

$$\forall x \in [a,b],\ \left\|\vec{\nabla}_x f\right\|_1 = \sum_{j=1}^{p} \left| \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_x \right| \leq M$$

alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M \left\|b-a\right\|_1$$

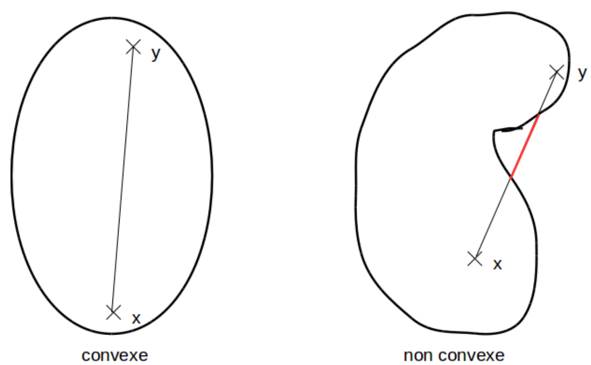
Démonstration : remise à plus tard.

Définition 6 : (Partie convexe)

Soit E un espace vectoriel quelconque. Une partie C de E est dite convexe si, et seulement si

$$\forall (x,y) \in C^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ (1-\lambda)x + \lambda y \in C$$

Cela signifie qu'un ensemble C est convexe si, et seulement si, tout segment joignant toute paire de points de C est contenu dans C. Pour illustrer cela, nous avons représenté dans la figure suivante une ellipse qui est un espace convexe de $\mathbb{R}^2$ et une cacahuète qui n'est clairement pas convexe puisqu'il existe au moins deux points (représentés sur la figure) tels que le segment de droite n'appartienne pas entièrement à l'espace (le segment extérieur à l'espace est représenté en rouge).



Propriété 10 :

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Si il existe un réel M tel que pour tout point $a \in U$ on a

$$\left\|\vec{\nabla}_x f\right\|_1 = \sum_{j=1}^{p} \left| \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_x \right| \leq M$$

alors f est M-lipschitzienne sur U.

Démonstration :
Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à toutes les paires de points de U. On a donc

$$\forall (a,b) \in U,\ |f(b) - f(a)| \leq M \left\|b - a\right\|_1$$

ce qui est la définition d'une application M-lipschitzienne.

Propriété 11 : (fonction constante)

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Alors f est constante sur U si, et seulement si, $\vec{\nabla}_a f$ est nul pour tout $a \in U$, c'est-à-dire

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ \forall a \in U,\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = 0$$

alors f est M-lipschitzienne sur U.

Démonstration :

$$f \text{ constante } \Longleftrightarrow f \text{ 0-lipschitzienne}$$

4.4 EDP du 1er ordre et $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

4.4.1 Généralités

Une équation aux dérivées partielles est une généralisation des équations différentielles. En effet :

une equation différentielle est une équation liant une fonction à ses dérivées	$\longrightarrow$	l'inconnue d'une équation diff est une fonction ne dépendant que d'une unique variable.

alors que :

une equation aux dérivées partielles est une équation liant une fonction à ses dérivées partielles	$\longrightarrow$	l'inconnue d'une équation aux dérivées partielles est une fonction de plusieurs variable.

On considérera dans la suite de cette section des équations aux dérivées partielles de la forme

$$F\Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, f, x, y\Big) = 0$$

où la fonction f inconnue est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Ce type d'équation aux dérivées partielles est appelé équations aux dérivées partielles du 1er ordre car, elle fait intervenir au plus des dérivées partielles d'ordre 1.

Considérons tout d'abord la plus simple des EDPs du 1er ordre

Théorème 8 :

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U de l'EDP

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = g(x,y) \tag{4.4}$$

sont de la forme

$$f(x,y) = K(y) + \int g(x,y)dx$$

où $\int g(x,y)dx$ est une primitive quelconque de g par rapport à la variable x. K est une fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}$ correspondant à la projection de U sur l'axe Oy.

Démonstration : trivial

Malheureusement, la vie (physique, finance, biologie, climatologie,...) n'est pas aussi simple que l'EDP précédente. Dans la suite, on cherchera des solutions à des EDP du 1er ordre un peu plus complexe. Pour cela, on sera amené à effectuer des changements de variables afin de ramener l'EDP étudiée à une EDP de la forme (4.4). Nous allons donc commencer par définir les conditions sous-lesquelles une application peut être considérée comme un changement de variables.

4.4.2 $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et changement de variables

Définition 7 : ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application ϕ de U dans V est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V, si, et seulement si, les propriétés suivantes sont vérifiées

1. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
2. ϕ réalise une bijection de U dans V.
3. ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Quel est l'intérêt d'introduire le concept de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ?

Pour la résolution des EDPs du 1er ordre, les changements de variables doivent être des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes. En effet, pour s'en persuader, considérons une EDP portant sur la fonction inconnue f. Soit ϕ une fonction permettant un changement de variables (directe [1], pour un changement de variables indirect le raisonnement est strictement identique). Ainsi f devient $h = f \circ \phi$. Alors

1. Si ϕ est $\mathcal{C}^1$ alors h est $\mathcal{C}^1$ par composition de fonctions $\mathcal{C}^1$ et h peut donc être solution d'une EDP du 1er ordre.

2. Si ϕ est une bijection, cela permet de passer des nouvelles variables aux anciennes et inversement ce qui est nécessaire pour pouvoir effectuer légalement le changement de variables.

3. Si ϕ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ alors $f = h \circ \phi^{-1}$ et f est bien $\mathcal{C}^1$.

Il existe un cas très simple pour lequel on est en mesure de dire immédiatement qu'il s'agit bien d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

Propriété 12 :

Si ϕ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $p = n$ et ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Démonstration :
Une application linéaire est une bijection si et seulement si $n = p$ (voir votre cours de préING 1 d'algèbre linéaire). De plus, comme ϕ est linéaire, on sait qu'il s'agit d'une application $\mathcal{C}^1$. Or ϕ^{-1} est aussi une application linéaire et donc est $\mathcal{C}^1$. Finalement l'application linéaire est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

1. Nous définirons par la suite ce que l'on entend par changement de variables direct ou indirect

Propriété 13 : (caractérisation rapide d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si l'application ϕ de U dans V vérifie les 3 prorpiétés suivantes

1. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U
2. ϕ réalise une bijection de U dans V
3. pour tout point a de U, $D_a\phi$ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

alors $p = n$ et ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.

Démonstration : Admis.

Propriété 14 :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Soit ϕ une application de U dans $\mathbb{R}^n$. Si le jacobien associé à l'application ϕ, en a, est non nul alors $D_a\phi$ est une application linéaire bijective en a.

Démonstration :
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. Soit ϕ une application de U dans V. Soit ψ une application de V dans $\mathbb{R}^n$. Soient $a \in U$ et $b = \phi(a) \in V$. Alors

1. $D_a\phi(h_1) = J_\phi(a)h_1$ et $D_b\psi(h_2) = J_\psi(b)h_2$ où h_1 est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et h_2 un vecteur de $\mathbb{R}^q$.
2. $D_a(\psi \circ \phi) = D_{\phi(a)}\psi \circ D_a\phi$ et donc $J_{\psi\circ\phi}(a) = J_\psi(\phi(a))J_\phi(a)$

Donc, si $\det(J_\phi(a)) \neq 0$ cela signifie que la matrice $J_\phi(a)$ est inversible. Or justement si on considère que $\psi = \phi^{-1}$ alors $J_{\phi^{-1}\circ\phi}(a) = I_d = J_{\phi^{-1}}(\phi(a))J_\phi(a)$ et donc $D_\phi(a)$ est inversible et l'inverse est donné par l'inverse de la matrice $J_\phi(a)$.

Exemple :
Soit U et V les deux ensembles définis par

$$U = \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$$
$$V = \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}\}$$

et l'application

$$\begin{array}{rcccl} f & : & U & \to & V \\ & & (\rho,\theta,\phi) & \mapsto & f(\rho,\theta,\phi) = (\rho\sin\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi) \\ & & & & = (f_1, f_2, f_3) \end{array}$$

alors f est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. En effet

1. f est $\mathcal{C}^1$ sur U car toutes les applications composantes le sont.
2. f est une bijection de U dans V puisque
3. montrons maintenant que $D_a f$ pour tout $a \in U$ est bijective. Pour cela déterminons le jacobien

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial \rho}\right|_a & \left.\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right|_a & \left.\frac{\partial f_1}{\partial \phi}\right|_a \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial \rho}\right|_a & \left.\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\right|_a & \left.\frac{\partial f_2}{\partial \phi}\right|_a \\ \left.\frac{\partial f_3}{\partial \rho}\right|_a & \left.\frac{\partial f_3}{\partial \theta}\right|_a & \left.\frac{\partial f_3}{\partial \phi}\right|_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix}$$

et donc $|J_f(a)| = -\rho^2\sin\phi \neq 0$ pour tout $a \in U$.

4.4.3 Résolution des EDPs par changement de variables

Le tableau suivant résume intégralement la démarche que nous utiliserons pour résoudre les EDPs du 1er ordre où la fonction inconnue f va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Direct	Indirect
$(x;y)=\varphi(u,v)$ $\varphi:\begin{cases} V & \longrightarrow & U \\ (u;v) & \longmapsto & (x(u,v);y(u,v)) \end{cases}$	$(u;v)=\varphi(x,y)$ $\varphi:\begin{cases} U & \longrightarrow & V \\ (x;y) & \longmapsto & (u(x,y);v(x,y)) \end{cases}$
φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.	
Posons $g=f\circ\varphi$ avec $f\in\mathscr{C}^1(U;\mathbb{R})$ Ainsi $g\in\mathscr{C}^1(V;\mathbb{R})$	Posons $g=f\circ\varphi^{-1}$, c'est-à-dire $f=g\circ\varphi$, avec $f\in\mathscr{C}^1(U;\mathbb{R})$ Ainsi $g\in\mathscr{C}^1(V;\mathbb{R})$
Changement de variables	
$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} & = & \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}\frac{\partial x}{\partial u}+\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & = & \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}\frac{\partial x}{\partial v}+\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}}\frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$ Exprimer (E) à l'aide de $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en reportant $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ Si le changement de variable est simple, il vaut parfois mieux l'inverser pour passer dans le cas « Indirect ».	$\begin{cases} \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} & = & \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}} & = & \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$ Injecter directement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dans (E) en fonction de $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$
Résoudre l'équation $(E'):F\left(\frac{\partial g}{\partial u};\frac{\partial g}{\partial v};g;u;v\right)=0$	
Revenir, si le changement de variable est simple à inverser, aux variables initiales x et y en utilisant $(u;v)=\varphi^{-1}(x,y)$	Revenir aux variables initiales x et y en utilisant $(u;v)=\varphi(x,y)$.

On a séparé en deux types de changement de variables : les changements de variables directs et indirects mais nous verrons qu'il n'est pas nécessaire de faire cette distinction.

Exemple : Afin d'illustrer la méthode de résolution des EDPs, cherchons la solution sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation :

$$2\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}=x^2y \tag{4.5}$$

en utilisant le changement de variables

$$(u,v)=(x,x+2y)$$

Commençons par identifier la fonction φ

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) = \Big(u(x,y), v(x,y)\Big) = (x, x+2y) \end{array}$$

Il faut tout d'abord montrer que φ est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Comme φ est une application linéaire, il suffit de montrer que c'est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ v = u + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = (v-u)/2 \end{cases}$$

il s'agit donc bien d'une bijection et finalement φ est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Utilisons maintenant φ afin d'introduire une nouvelle fonction g définie par

$$f(x,y) = (g \circ \varphi)(x,y) = g\Big(u(x,y), v(x,y)\Big) \iff f = g \circ \varphi$$

il s'agit donc d'un changement de variable indirect. De plus, on a

$$g(u,v) = (f \circ \varphi^{-1})(x,y) \iff g = f \circ \varphi^{-1}$$

Comme f et φ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{R}^2$ par stabilité de la propriété $\mathcal{C}^1$ par composition, g est également $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On peut maintenant, grâce à la propriété 7, exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celle de g

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{u,v} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x,y} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{u,v} \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x,y} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{u,v} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,y} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{u,v} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x,y} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{u,v} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{u,v} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = 2 \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{u,v} \end{cases}$$

On injecte maintenant ces expressions dans l'EDP que l'on cherche à résoudre

$$2 \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{u,v} = x^2 y = u^2 \times \frac{v-u}{2}$$

On doit donc résoudre l'EDP

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{u,v} = \frac{1}{4}(u^2v - u^3)$$

On peut facilement résoudre cette EDP en utilisant le théorème 8

$$g(u,v) = \frac{u^3v}{12} - \frac{u^4}{16} + K(v)$$

où K est une fonction quelconque, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Or $f = g \circ \varphi$, donc

$$f(x,y) = g(x, x+2y) = \frac{x^3(x+2y)}{12} - \frac{x^4}{16} + K(x+2y)$$

qui est donc solution de l'EDP (4.5).

Chapitre 5

Calcul différentiel d'ordre supérieur

5.1 Objectifs du chapitre

Dans le chapitre précédent, nous avons appris à résoudre les équations aux dérivées partielles du 1er ordre (qui font donc intervenir des dérivées partielles du 1er ordre). Nous allons, dans ce chapitre, nous intéresser aux EDPs faisant intervenir des dérivées partielles d'ordres supérieurs.

De plus, nous nous intéresserons à la résolution de systèmes d'EDPs du 1er ordre dont la résolution nécessite de manipuler des dérivées partielles d'ordre 2.

Et enfin, nous développerons une méthode afin d'étudier les extremums de fonctions allant de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}$.

5.2 Différentiation d'ordre supérieur ou égal à 2

Définition 1 : (Dérivées partielles d'ordre supérieur)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(i_1, i_2, .., i_k) \in [\![1, p]\!]^k$ un k-uplet d'entiers.

On dit que f admet une dérivée partielle kème en a par rapport aux variables numéro $i_1, ..., i_k$ si, et seulement si

- f admet une dérivée $(k-1)$ème par rapport aux variables numéro $i_1, i_2, ..., i_{k-1}$ sur un voisinage de a.
- cette dérivée partielle $(k-1)$ème admet, elle-même, une dérivée partielle première en a par rapport à la variable $k$ème.

Dans ce cas, cette dernière dérivée est appelée la dérivée partielle $k$ème en a par rapport aux variables numéro $i_1, i_2, ..., i_k$. On note cette dérivée

$$\left.\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}\right|_a$$

Nous venons d'introduire de manière très complexe et très formelle la notion de dérivée partielle d'ordre supérieur à 1 comme par exemple

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_a \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_a \qquad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\right|_a$$

Exemple : Soit $f(x, y, z) = xy^2z^3$. Alors

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\right|_{x,y,z} &= \left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right|_{x,y,z} \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y,z} = \left.\frac{\partial^2 (3xy^2z^2)}{\partial x \partial y}\right|_{x,y,z} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x,y,z} \left.\frac{\partial (3xy^2z^2)}{\partial y}\right|_{x,y,z} = \left.\frac{\partial (6xyz^2)}{\partial x}\right|_{x,y,z} = 6yz^2
\end{aligned}$$

Notons que l'on peut montrer que

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\right|_{x,y,z} = \left.\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}\right|_{x,y,z} = \left.\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}\right|_{x,y,z} = ...$$

ainsi, pour cette fonction, l'ordre dans lequel on effectue les dérivées partielles n'a aucune influence sur le résultat. Nous y reviendrons par la suite.

Définition 2 : (fonction de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. L'application f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, si, et seulement si, toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U. L'application f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, elle est $\mathcal{C}^k$.

Propriété 1 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. f est $\mathcal{C}^k$ sur U. Alors toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont définies et continues.

Démonstration : Admis.

La structure algébrique de l'espace $\mathcal{C}^k(U,F)$ (espace des fonctions $\mathcal{C}^k$ sur $U \subset \mathbb{R}^p$) est la même que celle de l'espace $\mathcal{C}^1(U,F)$ introduit au chapitre précédent (théorème 4, 5 et 6 du chapitre précédent). Nous n'allons rappeler ici que la stabilité par composition

Théorème 1 : (stabilité de $\mathcal{C}^k$ par composition)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^q$. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et g une application de classe $\mathcal{C}^k$ de V dans $\mathbb{R}^n$. Si $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Démonstration : Admis.

Théorème 2 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^n$. On a équivalence entre

1. la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$.
2. les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathbb{R}^n$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration : évident.

Théorème 3 : (théorème de Schwarz)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^q$. Soit $a \in U$ et $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont définies et continues en a alors

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right|_a = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_a$$

Démonstration : Admis.

Exemple : cas où il n'y a pas égalité.

Soit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculons les dérivées partielles du 1er ordre en $(0,0)$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0,0} = \lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\right) = 0 \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{0,0} = \lim\limits_{t\to 0} \left(\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}\right) = 0 \end{cases}$$

Calculons maintenant les dérivées partielles du 1er ordre en un point $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \frac{y(4x^2y^2+x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{0,0} = -\frac{x(4x^2y^2-x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

Les fonctions dérivées partielles premières sont donc

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \begin{cases} \frac{y(4x^2y^2+x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \begin{cases} -\frac{x(4x^2y^2-x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Or en passant aux coordonnées polaires, il est facile de montrer que ces deux applications sont continues.

Etudions maintenant les dérivées secondes croisées

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{0,0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t,0} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{0,0} \Big) = \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{t^5} = 1$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|_{0,0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0,t} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0,0} \Big) = \lim_{t\to 0} -\frac{t^5}{t^5} = -1$$

on voit donc que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{0,0} \neq \left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|_{0,0}$$

ce qui signifie que les dérivées secondes ne sont pas continues.

Nous avons ici introduit les définitions et théorèmes nécessaires à la résolution d'EDPs d'ordre supérieur à 1 ou alors de systèmes d'EDPs du 1er ordre. Nous allons donc maintenant étudier ces deux problèmes.

5.3 Systèmes d'EDPs du 1er ordre

On cherche ici à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = g(x,y) \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = h(x,y) \end{cases}$$

où f, g et h sont $\mathcal{C}^1$.

Pour résoudre ce système, nous utiliserons la démarche suivante

Etape 1 :
On vérifie que

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x,y} = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x,y}$$

En effet, si g et h sont $\mathcal{C}^1$ alors $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ sont continues. Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial h}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

sont continues. On déduit donc cela que f est $\mathcal{C}^2$. Donc f vérifie le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

d'où l'on peut écrire

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Etape 2 :
On résoud l'une des deux équations aux dérivées partielles. Résolvons par exemple la première :

$$f(x, y) = G(x, y) + K_1(y)$$

où G est une primtive selon x de g et K_1 est une fonction quelconque $\mathcal{C}^2$.

Etape 3 :
On dérive maintenant par l'autre variable (ici y) la solution obtenue à l'étape 2. Puis on injecte cette dérivée dans l'équation aux dérivées partielles qui n'a pas encore été utilisée.

$$\Longrightarrow \quad \text{équation sur } K_1$$

Etape 4 :
On résoud l'équation obtenue à l'étape 3.

Etape 5 :
On écrit alors la solution obtenue à l'étape 2 et l'étape 4

Exemple :
On cherche à résoudre, sur $\mathbb{R}^2$, le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = (x+1)\cos(x+y) + \sin(x+y) - \sin x = g(x,y) \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = (x+1)\cos(x+y) = h(x,y) \end{cases}$$

<u>Etape 1 :</u>
On vérifie que

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x,y} = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x,y}$$

alors

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -(x+1)\sin(x+y) + \cos(x+y) = \frac{\partial h}{\partial x}$$

donc, il est possible de trouver des solutions à ce système d'équations.

<u>Etape 2 :</u>
On intégre par rapport à y la seconde EDP (car elle est plus simple à intégrer). On obtient alors

$$f(x,y) = (x+1)\sin(x+y) + K_1(x)$$

où K_1 est une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Etape 3 :</u>
On dérive maintenant l'expression précédente par rapport à x (l'autre variable)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \sin(x+y) + (x+1)\cos(x+y) + \frac{\partial K_1}{\partial x}$$

On injecte cette expression dans l'EDP qui n'a pas encore été utilisée

$$\sin(x+y) + (x+1)\cos(x+y) + \frac{\partial K_1}{\partial x} = (x+1)\cos(x+y) + \sin(x+y) - \sin x$$

et finalement

$$\frac{\partial K_1}{\partial x} = -\sin x$$

Etape 4 :
On intègre maintenant l'équation précédente

$$K_1(x) = \cos(x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante d'intégration.

Etape 5 :
On peut maintenant écrire la solution

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+1)\sin(x+y) + K_1(x) \\ &= (x+1)\sin(x+y) + \cos(x) + C \end{aligned}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

5.4 EDPs d'ordre 2

Nous allons maintenant résoudre des EDPs d'ordre 2. La démarche sera la même que pour les EDPs d'ordre 1 : il s'agira d'utiliser des changements de variables pour ramener l'EDP considérée à une EDP dont on connaît la solution.

Théorème 4 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ sont de la forme

$$f(x,y) = xG(y) + H(y)$$

où G et H sont des fonctions $\mathcal{C}^2$ sur la projection de U sur l'axe Oy.

Démonstration : il suffit d'intégrer deux fois en utilisant le théorème d'intégration des EDP du chapitre précédent.

Théorème 5 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ sont de la forme

$$f(x,y) = G(x) + H(y)$$

où G et H sont des fonctions $\mathcal{C}^2$ sur la projection de U sur l'axe Ox et $0y$ respectivement.

Démonstration : tout autant trivial.

Comme pour les EDPs d'ordre 1, un changement de variables ne sera licite que si il s'agit d'un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme :

Définition 3 : ($\mathcal{C}^2$-difféomorphisme)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application ϕ de U dans V est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U dans V, si, et seulement si, les propriétés suivantes sont vérifiées

1. ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
2. ϕ réalise une bijection de U dans V.
3. ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$ sur V.

Exemple de résolution d'une EDP du 2nd ordre :

Trouver les applications f de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solutions de

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x,t} - \frac{1}{c^2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right|_{x,t} = 0$$

en utilisant le changement de variable $(X,Y) = (x+ct, x-ct)$.

Commençons par identifier l'application changement de variables :

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,t) & \mapsto & (X,Y) = \phi(x,t) = (x+ct, x-ct) \end{array}$$

Commençons par vérifier qu'il s'agit bien d'un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme. ϕ réalise clairement une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ car $\ker(\phi) = 0_{\mathbb{R}^2}$. De plus ϕ est clairement $\mathcal{C}^2$ car chaque application composante est $\mathcal{C}^2$. Il en va de même de

ϕ^{-1}. Donc ϕ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme.

On peut alors introduire la fonction g définie par

$$f = g\circ\phi \Longleftrightarrow f(x,y) = (g\circ\phi)(x,y) = g\circ\phi(x,y) = g(x+ct, x-ct) = g(X,Y)$$

Donc $g = f \circ \phi^{-1}$. Or la stabilité par composition de la propriété $\mathcal{C}^2$, la fonction g est bien $\mathcal{C}^2$ puisque ϕ^{-1} et f le sont.

On peut maintenant exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de g.

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,t} = \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_{X,Y} \left.\frac{\partial X}{\partial x}\right|_{x,t} + \left.\frac{\partial g}{\partial Y}\right|_{X,Y} \left.\frac{\partial Y}{\partial x}\right|_{x,t} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,t} = \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_{X,Y} \left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_{x,t} + \left.\frac{\partial g}{\partial Y}\right|_{X,Y} \left.\frac{\partial Y}{\partial t}\right|_{x,t} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_{X,Y} + \left.\frac{\partial g}{\partial Y}\right|_{X,Y} \\ \\ \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,y} = c\left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_{X,Y} - c\left.\frac{\partial g}{\partial Y}\right|_{X,Y} \end{cases}$$

en effectuant le même développement pour les dérivées secondes, on obtient

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x,t} = \left.\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}\right|_{X,Y} + \left.\frac{\partial^2 g}{\partial Y^2}\right|_{X,Y} + 2\left.\frac{\partial^2 g}{\partial X\partial Y}\right|_{X,Y} \\ \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_{x,t} = c^2\left.\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}\right|_{X,Y} + c^2\left.\frac{\partial^2 g}{\partial Y^2}\right|_{X,Y} - 2c^2\left.\frac{\partial^2 g}{\partial X\partial Y}\right|_{X,Y} \end{cases}$$

Injectons maintenant ces dérivées partielles dans l'EDP que l'on cherche à résoudre, afin d'obtenir

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}\right|_{X,Y} = 0$$

or cette EDP a pour solution

$$g(X,Y) = h(Y) + k(X)$$

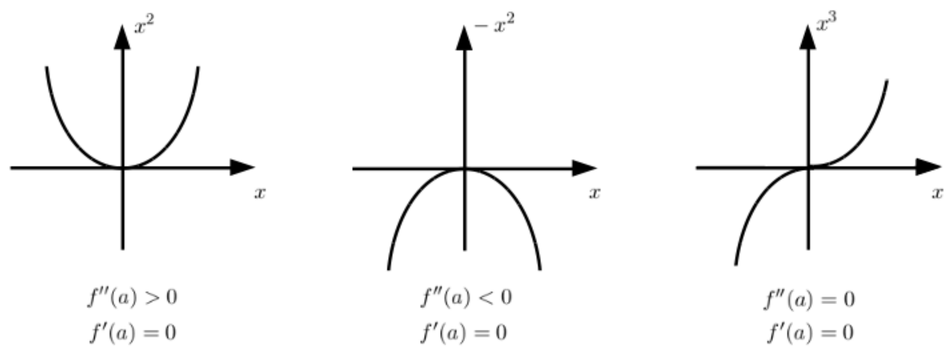
où h et k sont des fonctions quelconques $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Il ne reste plus qu'à se rappeler que $f = g \circ \phi$ donc

$$f(x,t) = (g\circ\phi)(x,t) = g(x+ct, x-ct) = h(x-ct) + k(x+ct)$$

5.5 Extremums de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

5.5.1 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Commençons, avant de discuter de la recherche des extremums des fonctions de plusieurs variables, par rappeler le cas simple des fonctions d'une seule variable. Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors on sait qu'une condition nécessaire pour que le point $a \in \mathring{A}$ soit un extremum est que $f'(a) = 0$ (tangente horizontale). Toutefois, ce critère n'est pas suffisamment restrictif. En effet, c'est le signe de la dérivée seconde qui permet de conclure sur la nature du point a.



Le cas de gauche correspond à un minimum, celui du centre à un maximum et enfin celui de droite à un méplat (ni un maximum ni un minimum). Dans le dernier cas, la dérivée seconde change de signe au point a.

5.5.2 Cas des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Définition 4 : (maximum local ou strict, minimum local ou strict)

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$, $a \in \mathring{A}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Alors :

1. f admet un minimum local en a, si, et seulement si, il existe un voisinage $V \subset A$ de a tel que
$$\forall x \in V,\ f(x) \geq f(a)$$
2. f admet un minimum strict en a, si, et seulement si, il existe un voisinage $V \subset A$ de a tel que
$$\forall x \in V \backslash \{a\},\ f(x) > f(a)$$
3. f admet un maximum local en a, si, et seulement si, il existe un voisinage $V \subset A$ de a tel que
$$\forall x \in V,\ f(x) \leq f(a)$$
4. f admet un maximum strict en a, si, et seulement si, il existe un voisinage $V \subset A$ de a tel que
$$\forall x \in V \backslash \{a\},\ f(x) < f(a)$$

On appelle, de manière générique, les maximums et les minimums des extremums.

Définition 5 : (extremum global)
Soient A une partie de $\mathbb{R}^p$, $a \in \mathring{A}$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$. Alors :

1. f admet un minimum global en a, si, et seulement si
$$\forall x \in A,\ f(x) \geq f(a)$$
2. f admet un maximum global en a, si, et seulement si
$$\forall x \in A,\ f(x) \leq f(a)$$

Définition 7 : (point critique)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. On dit que a est un point critique de f, si, et seulement si, toutes les dérivées partielles premières de f en a sont définies et égales à 0, c'est-à-dire, si, et seulement si, le gradient de f en a est défini et nul :

$$\vec{\nabla}_a f = 0_{\mathbb{R}^p}$$

Propriété 2 :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en a et que toutes les dérivées partielles de f en a sont définies, alors a est un point critique de f.

Démonstration :
Nous allons faire la démonstration dans le cas où a est un minimum local. Il existe alors $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et pour $\forall x \in B(a, r)$, $f(x) \geq f(a)$. Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Nous avons alors

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$$

Or si $|h| < r$ (ce qui est le cas à partir d'un moment puisque h tend vers 0), nous avons $a + he_i \in B(a, r)$ et donc $f(a + he_i) - f(a) \geq 0$. D'où

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} \geq 0$$
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} \leq 0$$

d'où une limite nulle. Comme cela est vrai pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\vec{\nabla}_a f = 0_{\mathbb{R}^p}$.

Comme dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la connaissance des points critiques n'est pas suffisante pour connaitre leur nature (minimum, maximum ou aucun des deux). Et comme dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il faut étudier les dérivées du second ordre pour conclure.

Propriété 3 : (Développement limité d'ordre 2)

Soient U un ouvert de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soient $a \in U$ et $U_0 = \{h \in \mathbb{R}^p / a + h \in U\}$. Alors, il existe une application $\epsilon \ : \ U_0 \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{h \to 0_{\mathbb{R}^p}} \epsilon(h) = 0$ et

$$\forall h = (h_1, ..., h_p) \in U_0,$$
$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_a + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

Cette relation est appelée développement limité de f à l'ordre 2 en a.

Démonstration : admis.

Théorème 6 : (Condition suffisante d'ordre 2)

Soient U un ouvert de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit a un point critique de f. On introduit la fonction Q

$$\begin{array}{rccl} Q \ : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ & h = (h_1, ..., h_p) & \mapsto & Q(h) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_a \end{array}$$

S'il existe un voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$ sur lequel

1. Q est positive et ne s'annule qu'en $h = 0$, alors f admet un minimum local strict en a
2. Q est négative et ne s'annule qu'en $h = 0$, alors f admet un maximum local strict en a.

Si pour tout voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$, Q admet des valeurs positives et négatives, alors f n'admet pas d'extremum local en a.

Démonstration :
Pour h suffisamment petit, $\vec{\nabla}_{(a+h)} f \approx 0_{\mathbb{R}^p}$ puisque a est un point critique.

Donc

$$f(a+h) - f(a) \approx \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_a = Q(h)$$

Si Q est positif alors $f(a+h) > f(a)$ donc minimum.
Si Q est négatif alors $f(a+h) < f(a)$ donc maximum.

Afin de systématiser l'étude précédente, on peut introduire la matrice hessienne

Définition 8 : (Matrice hessienne)

Soient U un ouvert de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit $a \in U$ un point critique de f. On définit alors la matrice hessienne de f en a, notée $H_f(a)$, par

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_a & \dots & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}\right|_a \\ \dots & \dots & \dots \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}\right|_a & \dots & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}\right|_a \end{pmatrix}$$

On introduit alors, pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ les notations de Monge

Définition 9 : (Notations de Monge)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit $a \in U$ un point critique de f. On définit alors les notations de Monge comme

$$r = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_a \qquad s = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_a = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_a \qquad t = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_a$$

alors avec ces notations

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Théorème 7 : (Condition suffisante d'ordre 2)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit a un point critique de f. Alors

1. Si $\det\big(H_f(a)\big) = rt - s^2 > 0$:
   (a) si $r > 0$, alors f admet un minimum local strict en a.
   (b) si $r < 0$, alors f admet un maximum local strict en a.
2. Si $\det\big(H_f(a)\big) = rt - s^2 < 0$, alors f n'a pas d'extremum local en a. Dans ce cas, a est appelé point-col, ou point-selle de f.
3. Si $\det\big(H_f(a)\big) = rt - s^2 = 0$, alors on ne peut pas conclure sans faire une étude locale poussée.

Démonstration :
distribuée en cours.

Finalement, la détermination des extremas d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ s'effectue par la méthode générale et systèmatique suivante :

$\boxed{\text{Plan général de recherche d'extrema de } f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$

Étape 0 Vérification du caractère $\mathscr{C}^2$ de f sur U.

Étape 1 Recherche des points critiques $(x;y)$ de f en résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

Étape 2 Pour chaque point critique, calculer r, s, et t, puis :

— Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, c'est un minimum local strict.

— Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, c'est un maximum local strict.

— Si $rt - s^2 < 0$, c'est un point-selle.

— Si $rt - s^2 = 0$, il faut faire une étude locale (DL à l'ordre 3 par exemple)

Étape 3

— Recherche de minima globaux :

  — Si f n'est pas minorée, pas de minimum global.

  — Si f est minorée, on choisit le (ou les) minimum(a) local(locaux) strict(s) dont la valeur de f est la plus faible.

— Recherche de maxima globaux :

  — Si f n'est pas majorée, pas de maximum global.

  — Si f est majorée, on choisit le (ou les) maximum(a) local(locaux) strict(s) dont la valeur de f est la plus forte.