



Préing 2 : Examen Final d'Analyse dans \mathbb{R}^n

L'usage d'appareil électronique est interdit.
Aucun document n'est autorisé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Date : Mercredi 24 Janvier 2024
Durée : 2h
Nombre de pages : 1 page recto-verso

Exercice 1 : Système d'EDPs d'ordre 1

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \exp(xy + y^2) - (y + 2x) \sin(xy + x^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + (x + 2y) \exp(xy + y^2) - x \sin(xy + x^2) \end{cases}$$

1. Préciser, en justifiant, sur quel domaine ce système est résoluble.
2. Résoudre ce système.

Exercice 2 : EDP d'ordre 1

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq \pm x, x \neq 0\}$ et φ le changement de variables de D défini par

$$\varphi(x, y) = (u, v) = \left(\frac{x + y}{x} ; x - y \right)$$

1. Montrer que φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme entre D et V , en précisant V .
2. Déterminer f de classe \mathcal{C}^1 sur D qui vérifie l'équation suivante :

$$\forall (x, y) \in D, x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \exp(x + y)$$

Exercice 3 : Résolution d'une EDP d'ordre 2

Soit φ le changement polaire dans $A = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Soit f une application de classe \mathcal{C}^2 sur A , et g l'application définie sur $\varphi^{-1}(A)$ par $g(r, \theta) = f \circ \varphi(r, \theta) = f(x, y)$.

1. Rappeler l'expression de $\varphi^{-1}(x, y)$ et l'ensemble $B = \varphi^{-1}(A)$.
2. Calculer l'expression de $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}$ en fonction de celles de f et uniquement des variables c et y .
3. Déterminer f de classe \mathcal{C}^2 sur A qui vérifie l'équation

$$\forall (x, y) \in A, xy \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + (x^2 - y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 + y^2) \cos \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

Exercice 4 : Classe \mathcal{C}^2

Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .
2. Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f .