DS3 : 2022 / 2023

• Exercice 1 :

1) ~~Soit $x, y \in \mathbb{R}$~~ On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2} - 2xy\sin(xy^2) + 2y\cos(x^2+y^2) + \frac{1}{y+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{y^2} - 2y\left(\sin(xy^2) + xy^2\cos(xy^2)\right) - 4xy\sin(x^2+y^2)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} - y^2\sin(xy^2) + 2x\cos(x^2+y^2) + e^x\right)$$

$$= -\frac{1}{y^2} - 2y\sin(xy^2) - 2y^3x\cos(xy^2) - 4xy\sin(x^2+y^2)$$

$$= -\frac{1}{y^2} - 2y\left(\sin(xy^2) + xy^2\cos(xy^2)\right) - 4xy\sin(x^2+y^2)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

donc le système est résolvable sur $\mathbb{R}^2$

2) On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - y^2\sin(xy^2) + 2x\cos(x^2+y^2) + e^x$$

$$\Leftrightarrow f(x,y) = \frac{x}{y} + \cos(xy^2) + \sin(x^2+y^2) + e^x + K(y)$$

alors

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - 2xy\sin(xy^2) + 2y\cos(x^2+y^2) + K'(y)$$

d'où : $K'(y) = \frac{1}{y+1}$

alors $K(y) = \ln(1+y) + C$ (avec $C \in \mathbb{R}$)

donc la solution du système est :

$f(x,y) = \frac{x}{y} + \cos(xy^2) + \sin(x^2+y^2) + e^x + \ln(1+y) + C$

• Exercice 2 :

1) On a φ est C^1 sur D car toutes ses composantes sont C^1 sur D (polynômes)

~~Soit~~ et.

$\varphi(x,y) = (u,v)$

$\Leftrightarrow (u,v) = (x^2+y, x^2-y)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2+y \\ v = x^2-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u+v}{2}} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$

d'où φ est bijective de D vers $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u+v > 0\} = V$

et $\varphi^{-1} : V \longrightarrow D$

$(u,v) \longrightarrow \varphi^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}, \frac{u-v}{2}\right)$

On a φ^{-1} est C^1 sur V car toutes ses composantes sont C^1 sur V (car $\forall (u,v) \in V : u+v > 0$)

donc φ est un C^1-difféomorphisme.

2) Soit $(x,y) \in D$ On ~~pose~~ pose $f = g \circ \varphi \Leftrightarrow f(x,y) = g(\varphi(x,y)) = g(u,v)$

On a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\left(\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2x \frac{\partial f}{\partial y} = 16x^3y$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\right) + 2x\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}\right) = 16x^3y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 4x^2y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 4\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = u^2 - v^2$$

$$\Leftrightarrow g(u,v) = \frac{u^3}{3} - uv^2 + h(v)$$

$$\Leftrightarrow g(u,v) = u\left(\frac{u^2}{3} - v^2\right) + h(v)$$

$$\Leftrightarrow f(x,y) = \cancel{\frac{(x^2+y)^3}{3}} \; (x^2+y)\left(\frac{(x^2+y)^2}{3} - (x^2-y)^2\right) + h(x^2-y)$$

avec h est de classe C^1

Exercice 3 :

1) On a φ est C^2 sur A car toutes ses composantes sont C^2 sur A

et on a :

$$\varphi(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \left(y, \frac{x}{y}\right) = (u,v)$$
$$\Leftrightarrow (x,y) = (uv, u)$$

d'où φ est bijective de A vers B

et $\varphi^{-1} : B \longrightarrow A$

$(u,v) \longrightarrow \varphi^{-1}(u,v) = (uv, u)$

et φ^{-1} est C^2 sur B car toutes ses composantes sont C^2 sur B

donc φ est C^2 difféomorphisme et on a :

$f = g \circ \varphi \iff$ ~~f(x,y)~~ $g = f \circ \varphi^{-1}$

d'où g est C^2 comme composition de deux fonctions C^2

2) On a $f = g \circ \varphi$ d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2v}{u}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{v^2}{u^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{1}{u}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} - \frac{v}{u^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

3) Soit $(x,y) \in A$:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy + 2y^3$$

$$\iff x^2\left(\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) + 2xy\left(\frac{1}{u}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} - \frac{v}{u^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2v}{u}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{v^2}{u^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = xy + 2y^3$$

$$\iff \left(\frac{x^2}{u^2} - \frac{2xyv}{u^2} + \frac{y^2v^2}{u^2}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \left(\frac{2xy}{u} - \frac{2y^2v}{u}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = xy + 2y^3$$

$$\iff u^2\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = u^2 v + 2u^3$$

$$\iff \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = v + 2u$$

$$\iff \frac{\partial g}{\partial u} = vu + u^2 + K(v)$$

$$\iff g(u,v) = v\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + h(v)$$

$$\iff f(x,y) = y^2\left(\frac{x}{2y} + \frac{y}{3}\right) + h\left(\frac{x}{y}\right)$$

avec $h \in C^2$ de classe

• Exercice 4 :

1) On a f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions continues

et :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^5(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^3\cos^5(\theta)$$

$$= 0$$

$$= f(0,0)$$

d'où f est continue en $(0,0)$

alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$

et sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{5x^4(x^2+y^2) - 2x^6}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2yx^5}{(x^2+y^2)^2}$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^5}{t^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} t^2$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

$$= 0$$

et :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0} r^2(3\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))$$

$$= 0$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2y x^5}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{r\to 0} -2r^2 \sin(\theta)\cos^5(\theta)$$
$$= 0$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

d'où $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$

donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

2) On a $(x,y) \longrightarrow \cancel{f}\, xy^2 g(x,y)$ est différentiable comme produit de deux fonctions différentiables

d'où h est différentiable comme composée de deux fonctions différentiables

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi(x,y) = xy^2 g(x,y)$

$$D_h(a) = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot h_1 + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot h_2$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{\varphi(a)} \cdot \frac{\partial(xy^2 g(x,y))}{\partial x}(a) \right) h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{\varphi(a)} \cdot \frac{\partial(xy^2 g(x,y))}{\partial y}(a) \right)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & t(x,y) = \varphi(x,y) & \longrightarrow & f(t) \end{array}$$