Correction DS 3

22

$3 + 4 + 6 + 9$

Exercice 1. Résoudre le système suivant :

3

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}y^2 + 2xy + e^x + \sin(2x) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = y^2 + xy + x^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y + 2x \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = y + 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

0,5

de $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xy + y^2 + x^2$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + x^2 y + K(x)$$

où K une fonction d'une variable de classe C^1.

1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}y^2 + 2xy + K'(x)$$

$$\frac{1}{2}y^2 + 2xy + e^x + \sin(2x) = \frac{1}{2}y^2 + 2xy + K'(x)$$

1

$$\Rightarrow K'(x) = e^x + \sin(2x) \Rightarrow$$

$K(x) = e^{x} - \frac{1}{2}\cos(2x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2} x y^2 + \frac{1}{3} y^3 + x^2 y +$ 0,5

$+ e^{x} - \frac{1}{2}\cos(2x) + c$

Exercice 2. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0, y \neq x\right\}$. Trouver f de classe C^1 sur D qui vérifie l'équation suivante : 4

$$\forall (x,y) \in D, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = (x+y)^2.$$

On propose le changement de variable suivant : $(u,v) = (\frac{x}{y}, x-y)$.

On a $\varphi : D \longrightarrow \varphi(D)$

$(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) = (\frac{x}{y}, x-y) = (u,v)$

est une fonction de classe C^1 sur D

$\frac{x}{y} = u, \quad x - y = v \Rightarrow \begin{cases} x = uy \\ uy - y = v \end{cases}$

$\Rightarrow y = \frac{v}{u-1}, \quad x = \frac{uv}{u-1}$

$\Rightarrow \varphi(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u \neq 1, v \neq 0\} = Z$

$\varphi^{-1} : Z \longrightarrow D$ 1

$(u,v) \longmapsto \varphi^{-1}(u,v) = \left(\frac{uv}{u-1}, \frac{v}{u-1}\right) = (x,y)$

φ^{-1} est de classe C^1 sur Z

Donc φ est C^1-difféomorphisme sur D.

on pose $f(x,y) = g(u,v)$ $\qquad$ g est de classe C^1 sur $\mathcal{Z}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\,\frac{1}{y} + \frac{\partial g}{\partial v} \times 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\,\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$$ 1

on remplace dans l'équation

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = (x+y)^2 \quad (\ast)$$

$$\frac{x}{y}\,\frac{\partial g}{\partial u} + x\,\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{x}{y}\,\frac{\partial g}{\partial u} - y\,\frac{\partial g}{\partial v} = (x+y)^2$$

$$(x-y)\,\frac{\partial g}{\partial v} = \left(\frac{uv}{u-1} + \frac{v}{u-1}\right)^2 = v^2\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^2$$

$$v\,\frac{\partial g}{\partial v} = \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^2 v^2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial v} = \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^2 v$$ 1

$$\Rightarrow g(u,v) = \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^2 \frac{v^2}{2} + h(u)$$

où h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{2} + h\left(\frac{x}{y}\right)$$ 1

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie 6

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^4}{x^2+y^2} & : \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. 1,5
2. Calculer les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial 2f}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. 4,5

① Sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ f et de classe C^∞

Comme fraction de deux Polynôme de classe C^∞

avec $x^2 + y^2 \neq 0$. donc f continue sur D.

<u>continuité en $(0,0)$</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \theta \text{ fixe}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^4 (\sin\theta + \cos\theta)^4}{r^2} = 0 = f(0,0)$$ 1,5

Donc f continue en $(0,0)$.

Donc f continue sur $\mathbb{R}^2$.

② Sur D

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2} - \frac{2x(x+y)^4}{(x^2+y^2)^2}$$

en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^4}{t^3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 4\dfrac{(x+y)^3}{x^2+y^2} - \dfrac{2x(x+y)^4}{(x^2+y^2)^2} & : (x,y) \in D \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases}$$

(1)

Dérivée seconde

sur D on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} - \frac{8x(x+y)^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$-2\left(\frac{(x+y)^4 + 4x(x+y)^3}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4x^2(x+y)^4}{(x^2+y^2)^3}\right)$$

$$= 12\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} - 16x\frac{(x+y)^3}{(x^2+y^2)^2} - 2\frac{(x+y)^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$+ \frac{8x^2(x+y)^4}{(x^2+y^2)^3}$$

en $(0,0)$

$$\frac{\partial_2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{4t - 2t - 0}{t} = 2$$

1,5

continuité de $\frac{\partial_2 f}{\partial x^2}$ en $(0,0)$

On calcule

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial_2 f}{\partial x^2}(x,y) = \lim_{r \to 0} \frac{\partial_2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \lim_{r \to 0} \Big(12(\cos\theta + \sin\theta)^2 - 16\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta)^3$$
$$- 2(\cos\theta + \sin\theta)^4 + 8\cos^2\theta(\sin\theta + \cos\theta)^4 \Big)$$

$$= 12(\cos\theta + \sin\theta)^2 - 16\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta)^3$$
$$- 2(\cos\theta + \sin\theta)^4 + 8\cos^2\theta(\sin\theta + \cos\theta)^4 \Big)$$

Pour $\theta = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \theta = 0}} \frac{\partial_2 f}{\partial x^2} = 12 - 16 - 2 + 8 = 2$

$\theta = \pi \Rightarrow \lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \theta = \pi}} \frac{\partial_2 f}{\partial x^2} = 12 + 16 - 2 + 8 = 34$

la limite de $\frac{\partial_2 f}{\partial x^2}$ dépende de θ

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ n'admet pas une limite en $(0,0)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ n'est pas continue en $(0,0)$

$\Rightarrow$ f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2

9

Exercice 4. Soit φ le changement de variables de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(x,y) = (x+2y, x-ay) = (u,v)$ où $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,2,-2\}$. Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, et g l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = g\circ\varphi(x,y) = g(u,v)$.

1. Trouver l'expression de φ^{-1}.
2. Trouver l'expression de $\dfrac{\partial g}{\partial u}, \dfrac{\partial g}{\partial v}, \dfrac{\partial 2g}{\partial u^2}, \dfrac{\partial 2g}{\partial v \partial u}$ en fonction de celles de f et uniquement des variables x et y.
3. Trouver f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifie l'équation suivante :

$$a\frac{\partial 2f}{\partial x^2} + (2-a)\frac{\partial 2f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial 2f}{\partial y^2} = (a+2)^3(x+y).$$

1)

$u = x + 2y, \quad v = x - ay$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -a \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad a \neq 2, 0$ $\quad \underline{a \neq -2}$

$$\begin{array}{l} a\times \\ 2\times \end{array} \begin{cases} u = x + 2y \\ v = x - ay \end{cases} +$$

$au + 2v = (a+2)x \Rightarrow x = \dfrac{1}{a+2}(au + 2v)$

$u - v = (a+2)y \Rightarrow y = \dfrac{1}{a+2}(u - v)$ 1

On pose $f(x,y) = g(u,v)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

1

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial u} - a\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \qquad 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\left(2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - a\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) - a\left(2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - a\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

$$= 4\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 4a\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \qquad 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\right) - a\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

$$= 2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2-a)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - a\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \qquad 1$$

$$2a\frac{\partial_2 f}{\partial x^2} + (2-a)\frac{\partial_2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial_2 f}{\partial y^2} = (a+2)^3(x+y)$$

$$2a\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) +$$

$$+\,(2-a)\left(2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2-a)\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} - a\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

$$-\left(4\,\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 4a\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + a^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

$$= (a+2)^3\,(x+y)$$

$$\left(4a + (2-a)^2 + 4a\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = (a+2)^3(x+y)$$

1

$$(a+2)^2\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = (a+2)^3\,(x+y) \qquad a+2 \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = (a+2)\,(x+y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = (a+2)\,\frac{1}{(a+2)}\,(au + 2v + u - v)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} = (a+1)\,u + v$$

1

$$\frac{\partial g}{\partial u} = (a+1)\,u v + \frac{1}{2} v^2 + h(u)$$

où h est une fonction d'une variable de classe C^2.

$$g(u,v) = \frac{(a+1)}{2} u^2 v + \frac{1}{2} v^2 u + H(u) + K(v)$$

où H, K sont des fonction d'une variable de classe C^2. (1)

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2} u v \left((a+1)u + v\right) + H(u) + K(v)$$

$$= \frac{(a+2)}{2} (x+2y)(x-ay)(x+y) + H(x+2y)$$

$$+ K(x-ay)$$

où K, H sont des fonction d'une variable de classe C^2. (1)