ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

DEVOIR SURVEILLÉ 2

Groupes : MI1, MI3, MI4, MEF1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 (xx pts)

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition et puis étudier la limite en $(0,0)$:

$$a)\ f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2} \quad ; \quad b)\ g(x,y) = \frac{\sin(x^2)}{y}$$

Exercice 2 (xx pts)

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue en $(0,0)$, pour chacune des questions suivantes :

$$1)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$2)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 3 (xx pts)

Calculer, sous réserve d'existence, les dérivées partielles du premier ordre des fonctions suivantes :

1) $f_1(x,y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$
2) $f_2(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$
3) $f_3(r,s) = e^{-(r^2+s^2)}\sin(r+s)$.

Exercice 4 (xx pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$
(étudier séparément les cas $(x,y) = (0,0)$ et $(x,y) \neq (0,0)$)
2) Déterminer les fonctions dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$.
(étudier séparément les cas $(x,y) = (0,0)$ et $(x,y) \neq (0,0)$)
3) La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?