CY TECH	**Préing 2 : DS 2 (sujet 0) d'Analyse dans $\mathbb{R}^n$**

L'usage d'appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.	*Date :* **Lundi 11 Décembre 2023 à 10h15** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **1 page recto verso**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 3 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 : limite, continuité, différentiabilité et classe $\mathcal{C}^1$. (11.5 points)

Soit l'application f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. (1.5 points)
2. Sur quel(s) domaine(s) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? (6.5 points)
3. Sur quel(s) domaine(s) f est-elle différentiable et le cas échéant, quelle est sa différentielle ? (3.5 points)

1. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: (0.5 point)
   $1/\sqrt{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car le dénominateur ne s'annule jamais sur cet ensemble et que x^2+y^2 est positif. On déduit de cela que $\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme composée de fonctions continues. Finalement, $x^2\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme produit de fonctions continues.

   En $(0,0)$: (1 point)
   On a

   $$|f(x,y)| = \left| x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq x^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

   donc

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

   Finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Etudions les dérivées partielles premières de f :

   En $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \times t^2 \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) = 0 \qquad \text{(1 point)}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \qquad \text{(1 point)}$$

   En $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{(1 point)}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = -\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{(1 point)}$$

   Ainsi, les applications dérivées partielles premières de f sont données sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \begin{cases} -\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Continuité des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$: (1 point)
   Comme précédemment $1/\sqrt{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ car x^2+y^2 est strictement positif. De ce fait $\cos(1/\sqrt{x^2+y^2})$ et $\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})$ sont continues comme composées de fonctions continues. De plus $x^3/(x^2+y^2)^{3/2}$ et $yx^2/(x^2+y^2)^{3/2}$ sont continues comme fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule jamais. Finalement les deux dérivées partielles sont conitnues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

   Continuité des dérivées partielles premières en $(0,0)$: (1.5 point)
   Posons, pour simplifier les notations

$$h(x,y) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)}$$

   Passons en coordonnées polaires

$$\tilde{h}(\rho,\theta) = -\frac{\rho^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{\rho^3\cos\left(\frac{1}{\rho}\right)} = -\cos^2(\theta)\sin(\theta)\cos\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

   qui n'est clairement pas défini quand ρ tend vers 0. Ainsi f n'est pas $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.

3. Etudions maintenant si f est différentiable.

 Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:
 Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur cet ensemble alors f y est différentiable. (0.5 point)

 De plus la différentielle est alors donnée par

$$D_{(x,y)}f(h_1,h_2) = h_1\left[2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right] - h_2\left[\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right] \qquad \text{(0.5 point)}$$

 En $(0,0)$:
 D'après le cours, f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left[f(h_1,h_2) - f(0,0) - h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} - h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\right] = 0 \qquad \text{(0.5 point)}$$

 notons alors

$$\epsilon(h_1,h_2) = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left[f(h_1,h_2) - f(0,0) - h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} - h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}\right]$$

 Dans notre cas, on a

$$\epsilon(h_1,h_2) = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}h_1^2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{(0.5 point)}$$

 Passons alors en coordonnées polaires

$$\tilde{\epsilon}(\rho,\theta) = \rho\cos^2(\theta)\sin\left(\frac{1}{\rho}\right) \underset{rho\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(1 point)}$$

 donc f est différentiable en $(0,0)$.

 La différentielle est alors donnée par

$$D_{(0,0)}f(h_1,h_2) = 0 \qquad \text{(0.5 point)}$$

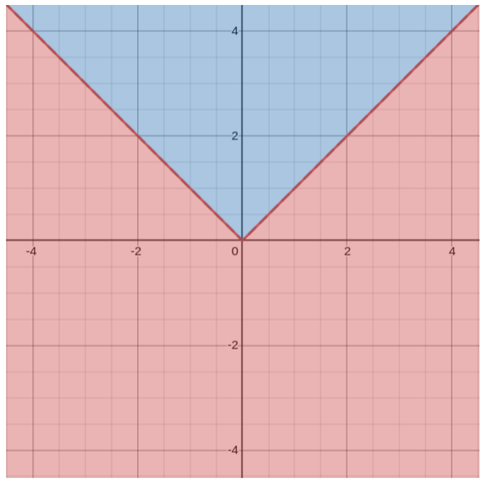
Exercice 2 : Continuité (4 points)

Soit la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|}{y^2} & \text{si } y > |x| \\ \frac{4y}{(|x|+|y|)^2} & \text{si } \Big(y \leq |x| \text{ et } (x,y) \neq (0,0)\Big) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Répresenter dans $\mathbb{R}^2$, les domaines sur lesquelles la fonction f ci-dessus a été définie. (1 point)
2. Etudier sur $\mathbb{R}^2$ la continuité de f. (3 points)

1. Voir ci-dessous la représentation des différents domaines (il manque $(0,0)$) (1 point)



2. Posons

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/ y > |x|\} \qquad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/ y < |x|\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/ y = |x|\}$$

Continuité sur U : (0.5 point)
f est continue sur U comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais puisque $y > |x| \geq 0$.

Continuité sur V : (0.5 point)
f est continue sur V comme quotient de 2 fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule jamais.

Continuité sur F :
Soit $(x_0, y_0) \in F$.

A partir de U : (0.5 point)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|x|}{y^2} = \frac{x_0}{y_0^2} = \frac{|x_0|}{|x_0|^2} = \frac{1}{x_0}$$

A partir de V : (0.5 point)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{4y}{(|x|+|y|)^2} = \frac{4y_0}{(|x_0|+|y_0|)^2} = \frac{1}{|x_0|}$$

donc continue sur F.
Continuité en $(0,0)$: (1 point)

Prenons $yy < 0$. Alors

$$f(0, y) = \frac{4y}{y^2} = \frac{4}{y} \underset{y \to 0}{\longrightarrow} -\infty$$

donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Exercice 3 : continuité bis (4.5 points)

Déterminer sur $\mathbb{R}^2$, la continuité des fonctions suivantes (1 point + 1.5 points + 2 points)

$$f_1(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \qquad f_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \qquad f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

Soit $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$:

Pour $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$: (0.5 point)
La fonction est clairement continue comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais.

En $(0, 0)$: (0.5 point)

$$|f_1(x, y)| = \frac{|xy|y^2}{x^2 + y^2} \leq |xy| \underset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$$

donc la fonction est continue en $(0, 0)$ et sa limite est 0.

Finalement la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $f(x, y) \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$:

Pour $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$: (0.5 point)
La fonction est clairement continue comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule jamais.

En $(0, 0)$: (1 point)
Passons en polaire

$$\tilde{f}_2(\rho, \theta) = \frac{\rho^2}{\rho(|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|)} = \frac{\rho}{|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|}$$

or

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ |\cos(\theta)| + |\sin(\theta)| > 0$$

d'où l'on déduit que

$$\tilde{f}_2(\rho, \theta) \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0$$

et finalement f_2 est continue en $(0,0)$ et sa limite vaut 0.

Soit

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Pour $\mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}$: (0.5 point)
La fonction est clairement continue comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais.

En $(0,0)$: (1.5 point)
Passons en polaire en posant

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Alors

$$\tilde{f}_3(\rho,\theta) = \frac{\rho^3\sin^3(\theta)}{\rho^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))} = \rho\sin^3(\theta) \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

donc la fonction est continue en $(1,0)$ et sa limite vaut 0.