CY_Tech.png	**Préing 2** **Devoir Surveillé 2**	
	Matière : **Analyse dans $\mathbb{R}^n$** L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.	*Date :* **Jeudi 06 Janvier 2022** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1 : Question de cours (2 points)

Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Montrer que f est différentiable en (x,y) si et seulement si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f\big(x+h_1,y+h_2\big) - f(x,y) - h_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} - h_2 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)}\right) = 0$$

Exercice 2 : Topologie (6 points)

Soit les ensembles

$$A =]-1;3] \cup \{4\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^4 + z^2 \leq 2022\}$$

1. Déterminer si A et B sont fermés. (1.5 points)
2. Déterminer $\overline{A}$ et $\overline{B}$. (1.5 points)
3. Sous quels critères un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est un compact ? (1 point)
4. A, B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils des compacts ? (2 points)

Exercice 3 (9 points)

Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^5}{x^6+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que
$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ |a| \leq \left(a^6 + b^6\right)^{1/6} \quad \text{(0.5 point)}$$
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? (1.5 points)
3. Calculer les dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$. (3 points)
4. Les dérivées partielles premières sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$? (1.5 points)
5. Sur quel domaine de $\mathbb{R}^2$, f est-elle $\mathcal{C}^1$? (0.5 point)
6. f est-elle différentiable en $(0,0)$? (2 points)

Exercice 4 (5 points)

Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \mapsto f(x,y,z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(x^2+y^2)\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^3$. (1 points)
2. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^3$. (4 points)