Préing 2 **Devoir Surveillé 1**	
Matière : **Analyse dans $\mathbb{R}^n$** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Jeudi 10 Novembre 2022** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1. (5,5 points)

1. On considère l'ensemble suivant :

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \quad / \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

   (a) Montrer que $A^\circ = \varnothing$ et que A n'est pas un fermé.

   (b) Trouver $(A \cup \{0\})^c$. En déduire que $A \cup \{0\}$ est un fermé.

   (c) Montrer que $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

2. Donner la définition d'une distance sur l'ensemble X.

3. Soit d une distance sur l'ensemble X, et δ une application définie par

$$\begin{aligned} \delta : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \delta(x, y) = min(d(x, y), 2) \end{aligned}$$

   Montrer que δ est une distance sur l'ensemble X.

Exercice 2. (3,5 points)
On note E l'espace vectoriel de toutes les fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$. On définit l'application N par

$$\forall f \in E \quad , \quad N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f^{'}(t) + f(t)| dt$$

Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 3. (7 points)

1. On définit l'application ϑ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \vartheta(x, y) = max\Big\{ |3x - y|; |5x + y| \Big\}$$

Montrer que ϑ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. En déduire que ϑ et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes.
3. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \vartheta(x,y) \leq 6||(x,y)||_\infty$.
4. Soit B_1 la boule unité fermée dans $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)$ et $B_2 = \overline{B}((0,0),6)$ la boule fermée dans $(\mathbb{R}^2, \vartheta)$. Montrer que $B_1 \subset B_2$.
5. Dessiner la boule unité fermée dans $(\mathbb{R}^2, \vartheta)$.

Exercice 4. (6 points) - On considère les ensembles suivants :

- $A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |3x - y| \leq 1, |y + 5x| \leq 1\Big\}$.
- $B =]-3,-2[\cup]2,3[\cup\{4\}$.

1. Les ensembles A et B sont-ils fermés, ouverts, ni fermés ni ouverts ? Justifier votre réponse.
2. Pour chaque ensemble A et B déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière. Justifier votre réponse.