Equations Différentielles

Exercice 1

Donner une équation différentielle dont la fonction f est une solution.

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
2. $f(x) = \dfrac{c}{1+e^x}$; où $c \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 1 + \dfrac{e^x}{1+x^2}$.
4. $f(x) = \dfrac{ax}{1+x^2}$; où $a \in \mathbb{R}$.

Solution

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = 1 - \dfrac{1}{1+e^x} f'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x)(1+f(x))\ y' = y(1+y)$
2. $f'(x) = -\dfrac{ce^x}{(1+e^x)^2} = -\underline{\dfrac{c\,(e^x+1-1)}{(1+e^x)^2} = -\dfrac{c}{1+e^x}} - \dfrac{c}{(1+e^x)^2} = -f(x) - \dfrac{1}{c} f(x)^2$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles. Préciser le domaine de validité des solutions :

a) $y' = -2y$, b) $yy' = -t$. c) $y' = ty$,

d) $y' = e^{t-y}$. e) $t^2 y' = -y$, f) $\left(1+t^2\right) y' = 1 + y^2$.

g) $y' = \dfrac{y}{1+t^2}$. h) $\left(1+t^2\right) y' = \dfrac{1+y^2}{t^3}$ i) $y' = \dfrac{y}{1-t^2}$.

j) $y' = e^{-y} \tan t$.

Solution

a) On applique le cours à une équation linéaire du premier degré à coefficients constant : Les solutions de l'équation différentielle sont $x \mapsto \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

b) On a $y^2 = \lambda - t^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (si $\lambda < 0$, $y^2 < 0$ faux)
donc $y = \sqrt{\lambda - t^2}$ ou $y = -\sqrt{\lambda - t^2}$

c) $y' = ty$,

$f(x) = Ae^{\int_1^x tdt} = Ae^{\frac{t^2}{2}}$, $A \in \mathbb{R}$

d) $y' = e^{t-y} \Leftrightarrow y'e^y = e^t \Leftrightarrow e^y = e^t + A \Leftrightarrow y = \ln\left(e^t + A\right)$

e) $t^2 y' = -y$

Pour $t \neq 0$, $y' = -\dfrac{1}{t^2} y$

$f(x) = Ae^{-\int_1^x \dfrac{1}{t^2} dt} = Ae^{\dfrac{1}{t}}$, $A \in \mathbb{R}$

f) $\left(1+t^2\right) y' = 1 + y^2$.

Equation à variables séparées

$$\left(1+t^2\right) y' = 1+y^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{1+y^2} = 1+t^2 \Leftrightarrow \ln\left(1+y^2\right) = t + \frac{t^3}{3} + A \Leftrightarrow y^2 = e^{t+\dfrac{t^3}{3}+A} - 1.$$

Donc $f(t) = \sqrt{e^{t+\dfrac{t^3}{3}+A} - 1}$ ou $f(t) = -\sqrt{e^{t+\dfrac{t^3}{3}+A} - 1}$

Ensemble de définition à revoir...

g) $y' = \dfrac{y}{1+t^2} \Leftrightarrow \dfrac{y'}{1+y^2} = \dfrac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \ln\left(1+y^2\right) = \arctan t \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{1 - e^{\arctan t}}$

h) $\left(1+t^2\right) y' = \dfrac{1+y^2}{t^3} \Leftrightarrow \dfrac{y'}{1+y^2} = \dfrac{1}{t^3\left(1+t^2\right)} \Leftrightarrow \ln\left(1+y^2\right) = \dfrac{1}{t^3} - \dfrac{1}{t} + \dfrac{t}{1+t^2}$

i) $y' = \dfrac{y}{1-t^2} \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{1-t^2} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{1-t^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2(1-t)} + \dfrac{1}{2(1+t)} \Leftrightarrow \ln|y| = -\dfrac{1}{2}\ln|1-t| + \dfrac{1}{2}\ln|1+t|$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$

j) $y' = e^{-y}\tan t \Leftrightarrow y'e^y = \tan t \Leftrightarrow e^y = A - \ln|\cos x| \Leftrightarrow y = \ln(A - \ln|\cos x|)$

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles :

1. $x^3 y' = xy^2 + x^2 y + 2y^3$,
2. $xy' = y + x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$,
3. $x^2 y' = xy - 5y^2$,
4. $xyy' = x^2 - xy + y^2$.

Solution

Dans tout cet exercice on reconnaît des équations homogènes.

1. $x^3 y' = xy^2 + x^2 y + 2y^3$,

   On pose $zx = y$ alors $z'x + z = y'$

   L'équation devient $x^3(z'x + z) = xz^2x^2 + x^2xz + 2z^3x^3$

   Donc $z'x = -z + z^2 + z + 2z^3 = z^2 + 2z^3$

Donc $\dfrac{z'}{z\left(1+2z^2\right)} = 1$ donc $\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{2z}{1+2z^2}\right) z' = 1 \Leftrightarrow \ln z - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+2z^2\right) = t + A$

$\Leftrightarrow \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}} = e^{x+A}$

$\Leftrightarrow z^2 = e^{2x+2A}(1+z^2)$

$\Leftrightarrow z^2 = \dfrac{e^{2x+2A}}{1-e^{2t+2A}}$

$\Leftrightarrow y = x\sqrt{\dfrac{e^{2x+2A}}{1-e^{2x+2A}}}$

Bien compliqué...

2. $xy' = y + x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

   On pose $z = \dfrac{y}{x}$ donc $y = zx$ donc $y' = z'x + z$

   $xy' = y + x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) \Leftrightarrow x(z'x+z) = zx + x\cos z \Leftrightarrow x^2 z' = x\cos z \Leftrightarrow \dfrac{z'}{\cos z} = \dfrac{1}{x}$

   On pose $w = \sin z$ docn $w \leqslant 1$d'où $w' = \cos z\ z'$

   $\dfrac{z'}{\cos z} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{w'}{1-w^2} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+w}{1-w}\right| = \ln|ax| \Leftrightarrow \left|\dfrac{1+w}{1-w}\right| = a^2x^2$

   $Soit\ u \in]-1;1[\ (1+w) = a^2x^2(1-w) \Leftrightarrow w = \dfrac{a^2x^2-1}{a^2x^2+1}$

   $z = \arcsin\dfrac{a^2x^2-1}{a^2x^2+1}$

   $y = x\arcsin\dfrac{a^2x^2-1}{a^2x^2+1}$

3. $x^2y' = xy - 5y^2$,

   On pose $z = \dfrac{y}{x}$ donc $y = zx$ donc $y' = z'x + z$

   $x^2z'x + x^2z = x^2z - 5z^2x^2 \Leftrightarrow \dfrac{z'}{z^2} = -\dfrac{5}{x} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{z} = -5\ln x \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{5\ln x}$

   Donc $y = \dfrac{x}{5\ln x}$

4. $xyy' = x^2 - xy + y^2$.

   On pose $z = \dfrac{y}{x}$ donc $y = zx$ donc $y' = z'x + z$

   $xzx(z'x+z) = x^2 - xxz + z^2x^2 \Leftrightarrow zz'x + z^2 = 1 - z + z^2 \Leftrightarrow zz'x = 1 - z$

   $\Leftrightarrow \dfrac{zz'}{1-z} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \left(-1 + \dfrac{1}{1-z}\right) z' = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow -z - \ln(1-z) = \ln x + A,\ \ A \in \mathbb{R}$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles, par la méthode de variation de la constante. Préciser le domaine de validité des solutions :

a) $y' = -2ty + t$

b) $y' = -\dfrac{y}{t^2} - \dfrac{1}{t^3}$

c) $y' = -y\tan t + \cos t \sin t$

d) $y' = -\dfrac{y}{t^2} + \exp\left(\dfrac{1}{t}\right)$

e) $y' = -\dfrac{y}{t^2-1} + t^2$

f) $y' = 2ty - (2t-1)e^t$

g) $y' = -\dfrac{y}{t} - 1$

h) $y' \cos t + y \sin t = \cos t + t \sin t$

i) $y' = \dfrac{(2t-1)}{t^2-1} y + 1$

j) $\left(e^t - 1\right) y' + \left(e^t + 1\right) y = 3 + 2e^t$

Solution

a) Equation homogène : $y(t) = Ce^{-t^2}$

Solution particulière (constante) : $y = \dfrac{1}{2}$

Donc solution générale : $f(t) = \dfrac{1}{2} + Ce^{-t^2}, \; C \in \mathbb{R}$

b) Solution de l'équation homogène : $x \mapsto Ae^{\int -\dfrac{dt}{t^2}} = Ae^{\dfrac{1}{t}}$

On cherche des solutions de la forme $A(t)e^{\frac{1}{t}}$

$A'(t)e^{\dfrac{1}{t}} = -\dfrac{1}{t^3}$ donc $A'(t) = -\dfrac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^3}$

On a $\displaystyle\int \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^3} dt$ on effectue le changement de variables : $u = -\dfrac{1}{t}$ d'où $du = \dfrac{dt}{t^2}$

$$-\int \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^3} dt = -\int ue^u du = -ue^u + e^u = \frac{1}{t} e^{-\dfrac{1}{t}} - e^{-\dfrac{1}{t}}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des fonctions :

$x \mapsto \dfrac{1}{t} - 1 + Ae^{\frac{1}{t}}$

c) Solution du système homogène : $t \mapsto A\cos(t)$

Variation de la constante $A'(t) \;\; \cos t = \cos t \sin t$

donc $A'(t) = \sin t$

et $A(t) = -\cos t$

Donc $f(t) = A \cos t - \cos^2(t), \; A \in \mathbb{R}$

d) Solutions du système homogène :

$f : x \mapsto Ae^{-\int \dfrac{dt}{t^2}} = Ae^{\dfrac{1}{t}}, \; A \in \mathbb{R}$

Variation de la constante : on cherche des solutions de la forme $A(t)e^{-\frac{1}{t}}$

$A'(t)e^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}}$ donc $A'(t) = 1$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $f(t) = te^{\frac{1}{t}} + Ae^{\frac{1}{t}}$

e)

f) Les solutions du système homogène sont $t \mapsto Ae^{t^2}$

Variation de la constante : $g(x) = A(t)e^{t^2}$

$A'(t)e^{t^2} = -(2t-1)e^t \Leftrightarrow A'(t) = (-2t+1)e^{t-t^2}$

Donc $A(t) = e^{t-t^2} + A$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $f : t \mapsto e^t + Ae^{t^2}$.

g) Les solutions de l'équation homogène sont $f(x) = Ae^{-\int_1^x \frac{1}{t}dt} = Ae^{-\ln(t)} = \frac{A}{t}$. On recherche des solutions de la forme $g(x) = \frac{A(t)}{t}$.
Donc $A'(t) = -t$ donc $A(t) = -\frac{t}{2} + A$, $A \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc l'ensemble des fonctions de la forme : $t \mapsto -\frac{t}{2} + \frac{A}{t}$.

Exercice 5

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

a) $xy' - y = x$ et $y(1) = 1$

b) $y' - y\cos t = 2\cos t - \sin^2 t \cos t$ et $y(0) = 1$

c) $y' + x^2 y + x^2 = 0$ et $y(0) = 0$ $y(0) = 0$

d) $y' - y = \cos x + e^x \sin 2x$ et $y(0) = 0$

e) $(x-1)y' + y = x$; et $y(2) = 2$

f) $t(t-1))y' - (3t-1)y = -t^2(t+1)$ et $y(2) = 0$

g) $4y' - y = \cos x$ et $y(0) = 0$

h) $y' - y = \sinh x$ et $y(0) = 1$

i) $e^x y' + y = 0$ et $y(0) = 1$

Solution

1. $xy' - y = x$; et $y(1) = 1$
On cherche des fonctions continue et à dérivées continues.
On a vu que les solutions générales de l'équation homogène sont $x \mapsto ax$ définies sur $\mathbb{R}$
Pour $x \neq 0$, la méthode de la variation de la constante aboutit à $x^2 a'(t) = x$ donc $a'(x) = \frac{1}{x}$
Une primitive est $a(x) = \ln|x|$
Donc $x \mapsto x\ln[x|$ est une solution particulière de l'équation.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $f : x \mapsto x(\ln|x| + a)$
On résout $f(1) = 1$ donc $a = 1$
On a raisonné pour $x \neq 0$, on remarque que la fonction obtenue est continue en 0 mais non dérivable.
L'unique solution du problème de Cauchy sur $]0; +\infty[$ est donc
$f : x \mapsto x(\ln|x| + 1)$ définie sur $]0; +\infty[$

2. $y' - y\cos t = 2\cos t - \sin^2 t\cos t\,$; et $y(0) = 1$
   Les solutions de l'équation homogène sont $f:\ t \mapsto Ae^{\sin t}$ avec $A \in \mathbb{R}$
   On utilise la méthode de la variation de la constante :
   $A'(t)e^{\sin t} = 2\cos t - \sin^2 t\cos t \Leftrightarrow A'(t) = \cos t\left(2 - \sin^2 t\right)e^{-\sin t}$
   $A(t) = \displaystyle\int \cos t\left(2 - \sin^2 t\right)e^{-\sin t}dt$ on effectue un changement de variable $u = \sin t$ et $du = \cos t dt$
   (Règles de Bioche)
   $A(t) = \displaystyle\int \left(2 - u^2\right)e^{-u}du = \left(u^2 + 2u\right)e^{-u} + A = \left(\sin^2 t + 2\sin t\right)e^{-\sin t}$
   Donc les solutions sont de la forme $\ f:\ t \mapsto \sin^2 t + 2\sin t + Ae^{-\sin t}$
   L'unique solution du problème de Cauchy est donc $f:\ t \mapsto \sin^2 t + 2\sin t + e^{-\sin t}$
3. $y' + x^2y + x^2 = 0;\quad$ et $\quad y(0) = 0\ y(0) = 1$
   Les solutions de l'équation homogène sont $f:\ x \mapsto Ae^{-\frac{x^3}{3}}$ avec $A \in \mathbb{R}$
   On observe que la fonction constante $y = -1$ est solution donc
   Donc les solutions sont de la forme $\ f:\ t \mapsto -1 + Ae^{-\frac{x^3}{3}}$
   L'unique solution du problème de Cauchy telle que $f(0) = 0$ est $f:\ t \mapsto -1 + e^{-\frac{x^3}{3}}$
4. $y' - y = \cos x + e^x\sin 2x;\quad$ et $\quad y(0) = 0$
   Les solutions de l'équation homogène sont $f:\ x \mapsto Ae^x$ avec $A \in \mathbb{R}$
   La méthode de la variation de la constante donne $A'(x) = e^{-x}\left(\cos x + e^x\sin 2x\right) = e^{-x}\sin x + \sin 2x$
   Or $e^{-x}\sin x = \dfrac{1}{2}e^{-x}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{(i-1)x} - e^{i(x+1)}\right)$
   $$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{(i-1)x}}{i-1} - \frac{e^{(i+1)x}}{i+1}\right) = -\frac{1}{4}\left(e^{(i-1)x}(i+1) - e^{(i+1)x}(i-1)\right)$$
   Une primitive est
   $$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4}(e^{-x}(\cos x + i\sin x)(i+1) - e^x(\cos x + i\sin x)(i-1) \\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{-x}(\cos x - \sin x) - e^x(-\cos x - \sin x)\right) \end{aligned}$$
5. $(x-1)y' + y = x;\quad$ et $\quad y(2) = 2$
   Les solutions de l'équation homogène sont $f:\ x \mapsto \dfrac{A}{x-1}$ avec $A \in \mathbb{R}$.
   La méthode de la variation de la constante donne $A'(x) = x(x-1)$
   donc $A(x) = \dfrac{x^2}{2} + A,\ A \in \mathbb{R}$
   Donc $f:\ x \mapsto \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{x^2}{2(x-1)},\ A \in \mathbb{R}$
   Il vient $f(2) = A + 2$
   Donc la solution, unique sur $]1; +\infty[$ telle que $f(2) = 2$ est $f:\ x \mapsto \dfrac{x^2-4}{2(x-1)},\ A \in \mathbb{R}$. Elle n'est pas prolongeable en 1.

6. $t(t-1))y' - (3t-1)y = -t^2(t+1)$;
   Les solutions de l'équation homogène sont $f: x \mapsto Ae^{\int \frac{3t-1}{t(t-1)}dt}$ avec $A \in \mathbb{R}$.
   On a $\dfrac{3t-1}{t(t-1)} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{2}{t-1}$
   $Ae^{\int \frac{3t-1}{t(t-1)}dt} = A^{\int \left(\dfrac{1}{t} + \frac{2}{t-1}\right)dt} = Ae^{\ln(t(t-1)^2} = At(t-1)^2$
   On cherche un solution particulière en $at^2 + bt + c$
   $t(t-1)(2at+b) - (3t-1)\left(at^2+bt+c\right) = -t^2(t+1)$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a & -3a & = & -1 \\ -2a+b & +a-3b & = & -1 \\ -b-3c & +b & = & 0 \\ c & & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{cases}$
   Un solution particulière est $x \mapsto t^2$
   Donc les solutions de l'équation sont de de la forme $x \mapsto At(t-1)^2 + t^2$
7. $4y' - y = \cos x$; et $y(0) = 0$ $y(2) = 0$
   Les solutions de l'équation homogène sont $f: x \mapsto Ae^{\dfrac{t}{4}}$ avec $A \in \mathbb{R}$.
   La méthode de la variation de la constante donne $A'(t) = \dfrac{1}{4}e^{-\dfrac{t}{4}}\cos t$
   On cherche la partie réelle de la primitive de $\dfrac{1}{4}e^{-\dfrac{t}{4}}e^{it} = e^{\left(-\frac{1}{4}+i\right)t}$
   Un primitive est $\dfrac{e^{\left(-\frac{1}{4}+i\right)t}}{-\frac{1}{4}+i} = \dfrac{4e^{-\frac{1}{4}}}{17}(\cos t + i\sin t)\left(-\dfrac{1}{4} - i\right) = \dfrac{4e^{-4t}}{17}\left(-\dfrac{1}{4}\cos t + \sin t\right) + i\ldots$
   Donc $A(t) = \dfrac{-\cos t + 4\sin t}{17}$
   Les solutions de l'équation sont donc $f: x \mapsto Ae^{4t} + \dfrac{\cos t + 4\sin t}{17}$ avec $A \in \mathbb{R}$.
8. $y' - y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; et $y(0) = 1$
   Les solutions de l'équation homogène sont $f: x \mapsto Ae^x$ avec $A \in \mathbb{R}$.
   On sépare les deux solutions :
   $y' - y = \dfrac{e^{-x}}{2}$
   On cherche des solutions en ae^{-x}
   $ae^{-x} + ae^{-x} = \dfrac{e^x}{2}$ donc $a = \dfrac{1}{4}$
   $y' - y = \dfrac{e^x}{2}$
   On cherche des solutions en bxe^x
   $be^x + bxe^x - bxe^x = \dfrac{e^x}{2}$ donc $b = \dfrac{1}{2}$
9. $e^x y' + y = 0$; et $y(0) = 1$

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles :

1. $x^3y' = x^2y + y^2 - x^2$
2. $y' = y^2 - \dfrac{1}{x^2}$
3. $y' - y + xy^3 = 0$
4. $y' - y + xy^4 = 0$
5. $xy' - y + \dfrac{x^4}{y^3} = 0$
6. $xy' - \dfrac{3}{4}y = (9x-3)y^5$

Solution

Exercice 7

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y' + \dfrac{y}{x} - y^2 + \dfrac{1}{x^2} = 0; \quad \text{et} \quad y(-1) = -2$
2. $\left(1+x^2\right)y' = y^2 - 1; \quad \text{et } y(0) = 2$
3. $xy' = y^2 - 3xy - 1; \quad \text{et} \quad y(3) = 9$
4. $xy' = -y + xy^3; \quad \text{et} \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Solution

1. $y' + \dfrac{y}{x} - y^2 + \dfrac{1}{x^2} = 0; \quad \text{et} \quad y(-1) = -2$

   On remarque $y = \dfrac{1}{x}$ est solution de l'équation.

   Sinon, on peut effectuer le changement de variable $u = xy$ donc $u' = xy' + y$

   Il vient $\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}\left(u' - \dfrac{u}{x}\right) + \dfrac{u}{x^2} - \dfrac{u^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xu' - u^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{u'}{u^2-1} = \dfrac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}\right)\dfrac{u'}{2} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow (\ln|u-1| + \ln|u+1|)\dfrac{1}{2} = \ln|ax| \end{array}$

   Donc $\dfrac{u-1}{u+1} = ax$ donc $1 - \dfrac{2}{u+1} = ax$ donc $\dfrac{2}{u+1} = 1 - ax$

   $u(x) = \dfrac{2}{1-ax} - 1$ donc $f(x) = \dfrac{1+ax}{x(1-ax)}$

2. $\left(1+x^2\right)y' = y^2 - 1; \quad \text{et } y(0) = 2$

   Les variables sont séparées :

   $\left(1+x^2\right)y' = y^2 - 1 \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y^2-1} = \dfrac{1}{1+x^2}$

   $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1}\right)\dfrac{y'}{2} = \dfrac{1}{1+x^2}$

Donc $\ln\left|a\dfrac{y-1}{y+1}\right| = (\arctan x)^2$ donc $\dfrac{y-1}{y+1} = ae^{(\arctan x)^2}$ donc $f(x) = \dfrac{1+ae^{(\arctan x)^2}}{1-ae^{(\arctan x)^2}}$

$f(0) = \dfrac{1+a}{1-a} = 2$ donc $a = \dfrac{1}{3}$

3. $xy' = y^2 - 3xy - 1;\quad$ et $\quad y(3) = 9$

$z = y - \dfrac{3}{2}x$ alors $z' = y' - \dfrac{3}{2}$

$x\left(z' + \dfrac{3}{2}\right) = \left(z + \dfrac{3}{2}x\right)^2 - 3x\left(z + \dfrac{3}{2}\right) - 1$ donc $xz' = z^2 + \dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{4}$

On pose $u = \dfrac{1}{z}$ d'où $z' = -\dfrac{u'}{u^2}$

donc $-\dfrac{xu'}{u^2} = \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{4}$ donc $u' = \dfrac{9}{4}\left(x - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{x}\right)u^2 + \dfrac{1}{x}$

$f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ On a $\dfrac{9}{4}\left(x - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{9}{4}\left(x - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right.$

4. $xy' = -y + xy^3;\quad$ et $\quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

On pose $z = \dfrac{1}{y^2}$ d où $z' = -\dfrac{2y'}{y^3}$

On a $x\dfrac{y'}{y^3} = -\dfrac{1}{y^2} + x$ d'où $x\dfrac{-z'}{2} = -z + x$ d'où $z' = 2\dfrac{z}{x} - 2$

Les solutions du sytème homogène sont $g(x) = Ax^2$ et $z = 1$ est une soution particulière donc

$g(x) = 1 + Ax^2$ est une solution de l'équation en z

donc les solutions de l'équation sont $f(x) = \dfrac{\epsilon}{\sqrt{1+Ax^2}}$ avec $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$

et $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Résoudre les équations différentielles :

a) $y'' - 6y' + 9y = 0$

b) $y'' + 4y' - 16y = 0$

c) $y'' - 2y' + 2y = 0$

d) $y'' - y = t^3 + t^2$

e) $y'' + 4y = 0\,;$

f) $y'' + 2y' + y = e^t$

g) $y'' - 6y' + 10y = 0$

h) $y'' + 2y' + y = e^t + \cos t$

i) $y'' + 5y' + 6y = 0$

j) $y'' + 2y' + 4y = t^2e^t$

k) $y'' - 2y' + 2y = te^t\cos t$

l) $y'' + 3y' + 2y = e^{2t}(t+1)$

m) $y'' - y = -6\cos t + 2t\sin t$

n) $y'' - 3y' + 2y = e^t\left(t^2+1\right)$

o) $y'' - 2y' + y = e^t\sin t$

p) $y'' + y' - 6y = e^t(2t+1)$

a) $x \mapsto Ae^{3x} + Bte^{3x}$

b) $r^2+4r-16=0 \Leftrightarrow (r+2)^2-20=0$
donc l'ensemble des solutions de l'équation est $f : x \mapsto Ae^{\left(-2+2\sqrt{5}\right)t}+BAe^{\left(-2-2\sqrt{5}\right)t}$

c) L'ensemble des solutions de l'équation est $f : x \mapsto e^t(A\cos t+B\sin t)$

d) Un solution particulière : $g(t)=-t^3+at^2+bt+c$
On a $g"(t)=-6t+2a$
$-6t+2a+t^3-at^2-bt-c=t^3+t^2$
Il vient : $a=-1$, $b=-6$ et $c=-2$
$g(t)=-t^3-t^2-6t-2$
Donc l'équation différentielle admet comme solution :
$x \mapsto A\cos t+B\sin t-t^3-t^2-6t-2$

e) $r^2+4=0 \Leftrightarrow r=2i\ ou\ r=-2i$, l'ensemble des solutions de l'équation est
$f : x \mapsto A\cos 2t+B\sin 2t$, $A\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{R}$

f) $r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow r=-1$, -1 est une racine double.
L'ensemble des solutions de l'équation est
$f : x \mapsto Ae^{-t}+Bte^{-t}$, $A\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{R}$

g) $r^2-6r+10=0 \Leftrightarrow (r-3)^2+1=0$
donc l'ensemble des solutions de l'équation est $f : x \mapsto e^{3t}(A\cos +B\sin t)$

h) $r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow (r+1)^2=0$ donc -1 est racine double.
on utilise le principe de superposition :
On cherche une solution particulière en λe^t, on obtient $\dfrac{1}{4}e^t$
On cherche une solution particulière en $\lambda\cos t+\mu\sin t$, on obtient $\dfrac{1}{2}\sin t$
donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$f : x \mapsto \frac{1}{4}e^t+\frac{1}{2}\sin t+e^{-t}(A+Bt)$$

i) $r^2+5r+6=0$ $\Delta=25-4\cdot 6=1$ Les solutions sont $r_1=\dfrac{-5+1}{2}=-2$ et $r_2=-3$
donc l'ensemble des solutions de l'équation est $f : x \mapsto Ae^{-2t}+Be^{-3t}$

j)

k)

l)

m)

n)

o) $y''-2y'+y=e^t\sin t$
L'équation caractéristique est $r^2-2r+1=0$ de solution double 1
On cherche une solution particulière de la forme $g(t)=e^t(a\sin t+b\cos t)$
$g'(t)=e^t(a\cos t-b\sin t+a\sin t+b\cos t)$
$=e^t((a-b)\sin t+(a+b)\cos t)$
et

$g"(t) = e^t((a-b)\cos t - (a+b)\sin t) + (a-b)\sin t + (a+b)\cos t$
$= e^t(2a\cos t - 2b\sin t)$
On résout donc
$g" - 2g' + g = e^t \sin t$
$\Leftrightarrow 2a\cos t - 2b\sin t - 2((a+b)\cos t + (a-b)\sin t) + (a\sin t + b\cos t) = \sin t$
$\Leftrightarrow 2a - 2a - 2b + b = 0 \ et \ -2b - 2a + 2b + a = 1$
$\Leftrightarrow b = 0 \ et \ a = -1$
Donc une solution particulière est $g(x) = -t\sin t$
L'ensemble des solutions est donc $f : x \mapsto -t\sin t + Ae^t + Bte^t$ avec $A \in \mathbb{R}, \ et \ B \in \mathbb{R}$

Exercice 9

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - y' - 2y = 0;$ et $y(0) = 1, y'(0) = 5$
2. $y'' + 4y' + 3y = 0;$ et $y(0) = 2, y'(0) = 0$
3. $y'' + 4y' + 4y = 0;$ et $y(0) = 1, y'(0) = 1$
4. $y'' + 10y' + 25y = t^3;$ et $y(0) = 1, y'(0) = 1$

Solution

1. $y'' - y' - 2y = 0;$ et $y(0) = 1, y'(0) = 5$
   L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$ ou $r = 2$
   L'ensemble des solutions est $f(x) = Ae^x + Be^{2x}$
   On résout $A + B = 1$ et $A + 2B = 5$ donc $B = 4$ et $A = -3$
   $f(x) = 4e^{2x} - 3e^x$
2. $y'' + 4y' + 3y = 0;$ et $y(0) = 2, y'(0) = 0$
   L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 3 = 0 \Leftrightarrow r = -1$ ou $r = -3$
   L'ensemble des solutions est $f(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x}$
   On résout $A + B = 2$ et $-A - 3B = 0$ donc $B = -1$ et $A = 3$
   $f(x) = 3e^{-x} - e^{-3x}$
3. $y'' + 4y' + 4y = 0;$ et $y(0) = 1, y'(0) = 1$
   L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = -2$
   L'ensemble des solutions est $f(x) = (Ax + B)e^{-2x}$
   On résout $B = 1$ et $A - 2B = 1$ donc $B = 1$ et $A = 3$
   $f(x) = (1 + 3x)e^{-2x}$
4. $y'' + 10y' + 25y = t^3;$ et $y(0) = 1, y'(0) = 1$
   L'équation caractéristique est $r^2 + 10r + 25 = 0 \Leftrightarrow r = -5$
   L'ensemble des solutions est $f(x) = (Ax + B)e^{-5x}$
   Solution particulière : $g(t) = \dfrac{1}{25}t^3 + at^2 + bt + c$
   $g'(t) = \dfrac{3}{25}t^2 + 2at + b$ et $g''(t) = \dfrac{6}{25}t + 2a$
   $g''(t) + g'(t) + g(t) = \dfrac{6}{25}t + 2a + 10\left(\dfrac{3}{25}t^2 + 2at + b\right) + 25\left(\dfrac{1}{25}t^3 + at^2 + bt + c\right)$
   D'où

$$\begin{cases} \frac{6}{5} & +25a & =0 \\ \frac{6}{25} & +20a & +25b=0 \\ 2a & +10b & +25c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & -\frac{6}{125} \\ \frac{6}{25} & -\frac{24}{25} & +25b=0 \\ -\frac{12}{125} & +10b & +25c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & -\frac{6}{125} \\ b & = & \frac{18}{625} \\ -\frac{12}{125} & +\frac{36}{125} & +25c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = & -\frac{6}{125} \\ b & = & \frac{18}{625} \\ c & = & -\frac{24}{3125} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $f(x) = (Ax+B)e^{-5x} + \frac{1}{25}t^3 - \frac{6}{125}t^2 + \frac{18}{625}t - -\frac{24}{3125}$

Exercice 10

Résoudre les équations différentielles :

a) $y''' - y'' - 2y' = 0$

b) $t^2y'' + 3ty' + y = 0$

c) $y'''' + 4y''' + 3y'' = 0$

d) $t^2y'' + ty' + y = 0$

Exercice 11

Résoudre les systèmes différentiels linéaires suivants :

a) $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = 4x + 4y \\ y' = -x - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 4x - 6y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = x + y + t \\ y' = -2x + 4y + e^t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$

f) $\begin{cases} x' = 5x - 4y + 1 \\ y' = -x + 2y + e^t \end{cases}$

g) $\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

h) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

i) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + e^t \\ z' = x + y + z \end{cases}$

Solution

1. $x = Ae^{3t}$ et $y = Be^{-3t}$ $B'(t)e^{-3t} = 5Ae^{3x}$ donc $B(t) = \frac{5}{6}e^{6x} + b$

   donc $y = \frac{5}{6}e^{3x} + Be^{-3x}$

2. $x' + y' = 3(x + y)$ donc $x' + y' = Ae^{3t}$ donc $x' = 4Ae^{3t}$ donc $x(t) = \frac{4}{3}Ae^{3t}$ et $y(t) = -\frac{A}{3}e^{3t}$

Exercice 12

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes y suivantes :

a) $y=\frac{c}{x}$; où $c\in\mathbb{R}$

b) $yy'=1+t^2$.

c) $y=cx^2$; où $c\in\mathbb{R}$

d) $yy'=1-t^2$.

e) $y'=-2ty$,

f) $y'=e^y\tan t$.

g) $t^2y'=-y^2$,

Exercice 13

Déterminer les solutions de $y''+2iy=0$ valant 1 en 0 et de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 14

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y''+y=|x|+1$.

Exercice 15

Soit x et y des fonctions de la variable t. Résoudre les système différentiels suivants :

a) $\left\{\begin{array}{l}x'=y+t^2\\ y'=x-t^2\end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l}x'=-7x+y+1\\ y'=-2x-5y\end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l}x'=2tx-y+t\cos(t)\\ y'=x+2ty+t\sin(t)\end{array}\right.$

On pourra poser $u=x+y$ et $v=x-y$ pour le système 1 , trouver une équation différentielle du second ordre satisfaite par x pour le système 2 , et poser $u=x+iy$ pour le système 3 .

Exercice 16

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle d'Euler (E) : $at^2y''+bty'+cy=f(t)$, où $a,b,c\in\mathbb{R}$ $(a\neq 0)$ et f une fonction continue de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

1. Posons $z(x)=y\left(e^x\right)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants en la variable x.
2. Résoudre l'équation d'Euler $t^2y''+ty'+y=\cos(2\ln(t))$ pour $t>0$.
3. Résoudre l'équation d'Euler $t^2y''-2ty'+2y=2t^3\sin(2t)$ pour $t>0$.

Solution

1. On considère y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ Cest done une fonction deux fois dérivable, qui satisfait :

$$at^2y''(t)+bty'(t)+cy(t)=f(t).$$

Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, il existe un unique $x\in\mathbb{R}$ tel que $t=e^x$. En reportant dans l'équation précédente, on obtient :

$$ae^{2x}y''\left(e^x\right)+be^xy'\left(e^x\right)+cy\left(e^x\right)=f\left(e^x\right)$$

Posons $z(x)=y\left(e^x\right)$. z est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$z'(x)=e^xy'\left(e^x\right)\text{ et }z''(x)=e^{2x}y''\left(e^x\right)+e^xy'\left(e^x\right).$$

Dès lors, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si

$$ae^{2x}y''\left(e^x\right)+be^xy'\left(e^x\right)+cy\left(e^x\right)=f\left(e^x\right)$$

soit encore en reportant :

$$az''(x)+(b-a)z'(x)+cz(x)=f\left(e^x\right)$$

2. On pose donc $z(x)=y\left(e^x\right)$. Par ce qu'on a fait précédemment, on est ramené à résoudre l'équation
$$z''+z=\cos(2x).$$
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :
$$x\mapsto A\cos(x)+B\sin(x)$$
avec $A,B\in\mathbb{R}$. On cherche à présent une solution particulière de l'équation, en utilisant le principe de superposition :
$$\left(E_1\right): z''+z=\frac{e^{2ix}}{2} \text{ et } \left(E_2\right): z''+z=\frac{e^{-2ix}}{2}$$
Pour $\left(E_1\right), 2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme $z_1(x)=ae^{2ix}$. En reportant on obtient $a=-\frac{1}{6}$, et donc $z_1(x)=-\frac{1}{6}e^{2ix}$. Une solution particulière de $\left(E_2\right)$ s'obtient en prenant le conjugué : $z_2(x)=-\frac{1}{6}e^{-2ix}$. Finalement une solution particulière de (E) est $z(x)=z_1(x)+z_2(x)=-\frac{1}{3}\cos(2x)$. Ainsi, les solutions de $z''+z=\cos(2x)$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto-\frac{1}{3}\cos(2x)+A\cos(x)+B\sin(x)$ avec $A,B\in\mathbb{R}$. Et les solutions de l'équation de départ sont les fonctions de la forme $t\mapsto-\frac{1}{3}\cos(2\ln(t))+A\cos(\ln(t))+B\sin(\ln(t))$ avec $A,B\in\mathbb{R}$.

Exercice 17

Résoudre l'équation suivante sur] - 1, 1[:

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+y=0$$

On pourra poser $x=\sin(t)$.

Exercice 18

Soit $(E):(1+x)y''-2y'+(1-x)y=(1+x)^3e^x, x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que $x\mapsto e^x$ est une solution de l'équation homogène associée.
2. Soit y une solution de (E) et z définie par $y(x)=z(x)e^x$ (on reconnait la méthode de variation de la constante), montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle $\left(E_1\right)$ que l'on résoudra.

3. Donner les solutions de (E).
4. En utilisant la méthode mise en oeuvre précédement, résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0$ en notant que $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est solution de de cette équation.

<u>Solution</u>

On va résoudre l'équation sur $I=]-1,+\infty[$, intervalle sur lequel le coefficient en y'' ne s'annule pas (il faudrait faire un raccordement pour obtenir les solutions sur $\mathbb{R}$..).

1. Il suffit de le vérifier.
2. Soit y une solution de (E) sur I. Alors y est deux fois dérivable sur I, et $z(x)=e^{-x}y(x)$ l'est aussi par produit. Pour tout $x\in I$, on a :

$$y'(x)=e^{x}\left(z(x)+z'(x)\right)\ \text{ et } y''(x)=e^{x}\left(z(x)+2z'(x)+z''(x)\right)$$

En reportant dans l'équation, on obtient que y est solution de (E) si et seulement si z' est solution de l'équation

$$(E_1):(1+x)u'+2xu=(1+x)^3.$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 , qu'on peut normaliser sur I :

$$u'+\frac{2x}{1+x}u=(1+x)^2$$

Une primitive de $\dfrac{2x}{1+x}$ est $-2\ln(|x+1|)+2x$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme :

$$x\mapsto\lambda e^{2\ln(|x+1|)-2x}=\lambda(x+1)^2e^{-2x}$$

avec $\lambda\in\mathbb{R}$. On cherche à présent une solution particulière par la méthode de variation de la constante, de la forme $y(x)=\lambda(x)(x+1)^2e^{-2x}$ avec λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On a en reportant :

$$\lambda'(x)(x+1)^2e^{-2x}=\lambda(x+1)^2$$

soit $\lambda'(x)=e^{-2x}$. On prend $\lambda(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}$, et $y(x)=\dfrac{(x+1)^2}{2}$. Ainsi les solutions de l'équation (E_1) sur I sont :

$$x\mapsto\lambda(x+1)^2e^{-2x}+\frac{(x+1)^2}{2}$$

3. On obtient alors $z'(x)=\lambda(x+1)^2e^{-2x}+\dfrac{(x+1)^2}{2}$ dont il faut déterminer une primitive. On procède par intégration par parties :

On obtient alors $z'(x)=\lambda(x+1)^2e^{-2x}+\dfrac{(x+1)^2}{2}$ dont il faut déterminer une primitive. On procède par intégration par parties :

$$
\begin{array}{c|cccc}
+ & (x+1)^2 & & e^{-2x} & \\
- & & \searrow & & \\
2(x+1) & & & -\dfrac{e^{-2x}}{2} & \\
2 & & \searrow & \dfrac{e^{-2x}}{4} & \\
- & 0 & & \searrow & -\dfrac{e^{-2x}}{8}
\end{array}
$$

Les fonctions $x \mapsto (x+1)^2$ et $x \mapsto e^{-2x}$ sont de classe $\mathcal{C}^3$. On obtient donc :

$$z(x) = \lambda \int (x+1)^2 e^{-2x} + \frac{(x+1)^2}{2} dx = -\lambda \frac{(x+1)^2}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{x+1}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{(x+1)^3}{6} + \mu$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Finalement les solutions de l'équation de départ sur I sont les fonctions $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$:

$$x \mapsto \left(-\lambda \frac{(x+1)^2}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{x+1}{2} e^{-2x} - \lambda \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{(x+1)^3}{6} + \mu \right) e^x.$$

Exercice 19

On considère l'équation différentielle

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour

1. $a = 0$
2. $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$)

Dans chacun des cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Solution

1. L'équation différentielle $y' - e^x e^y = 0$ est à variables séparées : en effet, en divisant par e^y, on obtient $-y' e^{-y} = -e^x$. Le terme de gauche est la dérivée de e^{-y}(y est une fonction de x), celui de droite est la dérivée de $x \mapsto -e^x$:

$$\frac{e^{-y}}{x} = \frac{(-e^x)}{x}$$

Les dérivées étant égales, cela implique que les deux fonctions sont égales à une constante additive près : ainsi y est solution sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, e^{-y} = -e^x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $-e^x + c > 0$, c'est-à-dire si $c > 0$ et $x < \ln c$. On obtient ainsi les solutions :

$$y_c(x) = -\ln(c - e^x) \quad (\text{ pour } x \in I_c =]-\infty; \ln c[)$$

où c est un paramètre réel strictement positif. Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c > 0$ tel que $0 \in I_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 1$ et $c - 1 = 1$. Il s'agit donc de $y_2 : x \mapsto -\ln(2 - e^x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $I_2 =]-\infty; \ln 2[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_2'(0) = e^0 e^{y(0)} = 1$, c'est la première bissectrice. Comme par construction y_2' est à valeurs strictement positives, la fonction y_2 est strictement croissante.

2. Posons $z(x) = x + y(x)$: z a le même domaine de définition que y et est dérivable si et seulement si y l'est. En remplaçant $y(x)$ par $z(x) - x$ dans l'équation différentielle $y' - e^x e^y = -1$, on obtient $z' - e^z = 0$, c'està-dire $z' e^{-z} = 1$. Il s'agit de nouveau d'une équation à variables séparées : en intégrant cette égalité, on obtient que z est solution sur J si et seulement si elle est dérivable sur J et $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in J, e^{-z} = -x + c$. À c fixé, cette égalité n'est possible que si $c > x$. On obtient ainsi les solutions :

$$y_c(x) = z_c(x) - x = -x - \ln(c - x) \quad (\text{ pour } x \in J_c =]-\infty; c[)$$

où c est un paramètre réel. Pour que l'une des courbes intégrales passe par l'origine, il faut qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $0 \in J_c$ et $y_c(0) = 0$: autrement dit, $c > 0$ et $c = 1$. Il s'agit donc de $y_1 : x \mapsto -x - \ln(1 - x)$, la courbe intégrale cherchée est son graphe, au-dessus de l'intervalle $J_1 =]-\infty; 1[$. Sa tangente en l'origine a pour pente $y_1'(0) = e^0 e^{y(0)} - 1 = 0$: elle est horizontale.

Exercice 20

On considère une solution y de l'équation différentielle $ty'' - 2y' - ty = 0$ avec $t > 0$.

1. Montrer que y est indéfiniment dérivable pour tout $t > 0$.
2. En dérivant cette équation, montrer que y vérifie une équation différentielle linéaire du 4^e ordre à coefficients constants.
3. En raisonnant comme pour les équation du second ordre à coefficients constants, résoudre cette équation et en déduire les solutions de l'équation différentielle initiale.

Exercice 21

On considère une fonction indéfiniment dérivable $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ et l'équation

$$y'' + y = f(x)$$

On cherche les solutions y sur $[0, \pi/2]$ vérifiant $y(0) = y(\pi/2) = 0$ et on pose à cet effet :

$$F(x) = -\cos(x) \int_0^x f(t)\sin(t)dt + \sin(x) \int_{\pi/2}^x f(t)\cos(t)dt$$

1. Préciser les solutions de l'équation différentielle

   $$y'' + y = 0$$

   vérifiant

   $$y(0) = y(\pi/2) = 0$$

2. On envisage ici les deux cas particulier $f(x) = 1$ et $f(x) = x$. Exprimer dans ces deux cas $F(x)$ sans symbole intégral, puis $F''(x) + F(x)$. En déduire dans ces deux cas les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telles que $y(0) = y(\pi/2) = 0$

3. On revient au cas général. Montrer que F est deux fois dérivable, expliciter $F'(x)$ et $F''(x)$, puis exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire les solutions y de $y'' + y = f(x)$ telles que $y(0) = y(\pi/2) = 0$.

Exercice 22

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit ϕ par $\phi(x) = f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt$.

1. Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ϕ''.
2. Donner l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ satisfaisant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt = x^2$.

Exercice 23

On considère une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = \exp(at)y(-t)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1. Montrer que y est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que y vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
3. En déduire toutes les fonctions y de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient la relation précédente sur $\mathbb{R}$.