Intégration

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } 0<x<1 \\ 3 & \text{si } x=1 \\ -2 & \text{si } 1<x\leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2<x\leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x\in[0,4]$, calculer $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,4]$?

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^3 |2t-5|\ dt$,

b) $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{E(t)}\ dt$, (E partie entière)

c) $\displaystyle\int_0^\pi \min(2,t)\ dt$,

d) $\displaystyle\int_{-1}^2 t|t|\ dt$.

Exercice 3

a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx$

b) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1+x^2}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx$

e) $\displaystyle\int \cos(x)\sin^2(x)dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln\left(x^2\right)}dx$

i) $\displaystyle\int (3x-1)\left(3x^2-2x+3\right)dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$

k) $\displaystyle\int (1-\cos(3x))dx$

l) $\displaystyle\int x\sin\left(x^2\right)dx$

m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

Exercice 4 *(Intégration par parties)*
Calculer les primitives suivantes :

a) $\int e^x \cos x dx$ b) $\int \frac{\ln x}{x^n} dx$ avec $n > 1$ c) $\int x \arctan x dx$

d) $\int \left(x^2 + x + 1\right) e^x dx$ e) $\int e^{-x} \sin x dx$ f) $\int (\ln x)^2 dx$

g) $\int \arctan x dx$ h) $\int x^3 \sin x dx$

Exercice 5
Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x})$ b) $\int (\arcsin x)^2 dx$

c) $\int x^2 \sqrt{1+x^3} dx.$ d) $\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x - 1}} dx$

e) $\int \cos \sqrt{x} dx.$ f) $\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

g) $\int \frac{e^{\tan x}}{(\cos x)^2} dx$ h) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Exercice 6
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$ b) $\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \, dt$ c) $\int_0^\pi t^2 \sin t \, dt$

d) $\int_{1-\frac{\pi^2}{4}}^1 \cos \sqrt{1-t} \, dt$ e) $\int_{-1}^1 \frac{t-1}{1+t^2} dt$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \sin t}$

g) $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$ h) $\int_1^4 \frac{dt}{1+e^t}$ i) $\int_0^1 t (\arctan t)^2 dt$

Exercice 7
Considérons l'intégrale $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$
Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.

Exercice 8

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   Montrer que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx$
   En déduire le valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx$
2. Montrer que
$$\int_{\frac{1}{a}}^a \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx = \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{1}{a}\right)$$
   pour $a > 1$, (Indication : utiliser la formule $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, pour $x > 0$).

Exercice 9
Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

a) $\dfrac{x^3}{x^2-4}$. b) $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$. c) $\dfrac{3t+1}{t^2-2t+10}$.

d) $\dfrac{1}{t^3+1}$. e) $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$. f) $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.

g) $\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2\,(x^2+1)}$ h) $\dfrac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

Exercice 10
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 11 *Intégrales de Wallis*
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Exercice 12
Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 13 *Séries de Riemann*
Calculer :

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Exercice 14

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+p^2}$.

Exercice 15

Sans calculer les intégrales, montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx.$$

Exercice 16

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. On suppose f T-périodique. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.
3. Ecrire $g(x)$ sous la forme $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{nT} f(t)dt + \dfrac{1}{x}\int_{nT}^{x} f(t)dt$ pour un entier n bien choisi, et en déduire que g admet une limite en $+\infty$.

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 18

Déterminer les fonctions f continues sur $[a,b]$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup_{[a,b]}|f|$.

Exercice 19

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. On suppose f T-périodique. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.
3. Ecrire $g(x)$ sous la forme $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{nT} f(t)dt + \dfrac{1}{x}\int_{nT}^{x} f(t)dt$ pour un entier n bien choisi, et en déduire que g admet une limite en $+\infty$.