TD : Représentation matricielle et changement de bases

Exercice 1

Déterminer les matrices, dans les bases canoniques, des applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; f(x,y) = (x-y, 2x, 3x+2y)$.
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; g(x,y,z) = (x-y+z, 2x-z)$
3. $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2

1. Donner la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x,y,z) = (x+2y-z; 2x+3y-3z; x+y-2z)$ dans la base canonique.
2. Déterminer $Im(f), Ker(f)$ (et leurs bases).
3. Montrer que $((1,1,0);(0,1,1);(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 3

Soit $f \in Ł(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^3)$ et A sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $g \in Ł(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2)$ définie par $g(x,y,z) = (x-2y+z; z-x)$.

1. Quelle est l'image du vecteur $u = (2;-3)$ par f ?
2. Donner la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Les applications linéaires $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles définies ? Si oui, donner leurs matrices dans les bases canoniques.
4. Établir l'expression analytique de $f \circ g$.

Exercice 4

Soit g une endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ et on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer $det(M)$.
2. g est-elle injective ?
3. Calculer le rang de M.

Exercice 5

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et on considère A la matrice de f dans la base canonique B_c de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression analytique de f.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
3. On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 0, 0), u_3 = (1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer qe $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   (b) Déterminer la matrice D de f dans la base B'.
   (c) Ecrire la matrice de passage P de la base B_c à la base B'.
   (d) Donner la relation entre A, D, P et P^{-1}.
   (e) Calculer P^{-1}.

Exercice 6

1. Expliquer pourquoi toute application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ n'est pas surjective.
2. Expliquer toute application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas injective.
3. Calculer le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit f l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x, y, z) & \mapsto & (2x + y + z, x, y + z) \end{array}$$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique B_c de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
3. On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 0, 0), u_3 = (0, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la matrice D de f dans la base B'.

(c) Ecrire la matrice de passage P de la base B_c à la base B'.

(d) Donner la relation entre A, D et P.

(e) Calculer P^{-1}.

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Montrer que $B' = (u_1; u_2; u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (1;1;0), u-2 = (1;2;1), u_3 = (-1;-2;1)$.
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base B'.
3. Déterminer la matrice de passage de la base B' vers la base canonique.
4. Calculer la matrice de f dans la base B'.
5. Calculer $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ dans la base canonique, puis dans la base B'.
6. Retrouver la matrice de f dans la base B'.

Exercice 9

Soit $B = (1 - 3X^2; 2 + X - 5X^2; 1 + 2X)$.

1. Vérifier que B est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique $(1; X; X^2)$ vers la base B.

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $P \in E$, soit $f(P) = (X2 + X + 1)P'' + X2P' - 2XP$.

1. Montrer que pour tout $P \in E, f(P) \in E$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E.
4. L'application f est-elle un isomorphisme de E ? Justifier.
5. Soit $B = (X; X^2; X^2 + X + 1)$. Montrer que B est une base de E puis donner la matrice de f dans B.

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ rapporté à sa base canonique B_c. Pour $P \in E$, on pose $f(P)$ le polynôme tel que $f(P)(X) = (1 - X)P'(X) + 3P(X)$.

1. Montrer que $f \in Ł(E)$ et déterminer sa matrice A dans la base B_c.
2. Donner une base et la dimension de $\ker(f), \Im(f)$.
3. Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires dans E ?
4. Soit $P_0 = 1, P_1 = 1 - X, P_2 = (1-X)^2 2$ et $P_3 = (1-X)^3$. Montrer que $B = (P_0; P_1; P_2; P_3)$ est une base de E.
5. Donner la matrice A' de f dans la base B et calculer $(A')^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer la matrice de passage P de B_c à B puis effectuer le produit $P \times P$. Que peut-on en déduire ?
7. Déterminer f^n

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie, pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, par

$$f(x, y, z) = (17x - 28y + 4z, 12x - 20y + 3z, 16x - 28y + 5z).$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base B_1 du noyau de f .
3. Soit $F = u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u$ l'ensemble des vecteurs invariants par f . Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer une base B_2 de F.
4. Montrer que les deux espaces précédents sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
5. Écrire la matrice de f dans la base $B = B_1 \cup B_2$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13

Montrer que les matrices A et B suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14

1. Vérifier que les matrices A et B suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer toutes les matrices P telles que $B = P^-1AP$.