

TD7: Déterminants

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants (on cherchera à trouver une méthode simple).

$$1. A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2. A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3. A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$4. A_4 = \begin{pmatrix} -7 & 14 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5. A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}$$

$$6. A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$7. A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$8. A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9. A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Montrer que

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$$

Exercice 3

Pour a, b et c deux à deux distincts, factoriser:

$$\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$$

Exercice 4

Soit a, b, c, d des réels. On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de M .
2. Déterminer les valeurs de a, b, c et d qui annulent $\det(M)$.

Exercice 5

Soit x un réel. Calculer les déterminants respectivement d'ordre 4 et d'ordre n suivants :

$$D_4(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$