TD5: Matrices

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, les produits AB et BA existent-ils ? Si oui, les calculer

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$,
2. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}$
4. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&-1\\3&1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\-1&-2&0\end{pmatrix}$

Exercice 2

On consid'ere les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

Calculer $AB, BA, (A-B)^2$et $A^2-2AB+B^2$. Que remarque-t-on?

Exercice 3

Soit

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$$

Calculer A^tA. La matrice A est-e-elle inversile? si oui, quel est son inverse?

Exercice 4

Soit $A=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2-3A+2I_2$. En deduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n\geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)=X^2-3X+2$.
3. Déterminer l'expression de A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que l'on peut écrire $A = 3I_3 + N$ où N est une matrice à déterminer.
2. Calculer N^2, N^3 puis N^p pour $p \geq 3$.
3. En déduire A^p pour tout $p \geq 1$.
4. Application. Soit $(x_n), (y_n)$ et (z_n) trois suites réelles telles que

$$x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 7$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 3z_n \end{cases}$$

Soit $X_n = (x_n, y_n, z_n)^t$

(a) Trouver une matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$.
(b) En déduire que $X_n = M^n X_0$.
(c) Calculer M^n.
(d) En déduire les expressions de x_n, y_n, z_n en fonction de n.