
TD : Matrices

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, les produits AB et BA existent-ils ? Si oui, les calculer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB , BA , $(A - B)^2$ et $A^2 - 2AB + B^2$. Que remarque-t-on ?

Exercice 3

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer tAA . La matrice A est-elle inversible ? Si oui quel est son inverse.

Exercice 4

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$. Calculer A^n .

Exercice 5

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

1. Vérifier que l'on peut écrire $A = 3I_3 + N$ où N est une matrice à déterminer.
2. Calculer N^2, N^3 puis N^p pour $p \geq 3$.
3. En déduire A^p pour tout entier $p \geq 1$.
4. Application. Soient $(x_n), (y_n)$ et (z_n) trois suites réelles telles que

$$x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 7$$

et vérifiant les relations de récurrences

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n + y_n \\ y_{n+1} &= 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= 3z_n \end{aligned}$$

On considère $X_n = {}^t(x_n, y_n, z_n)$.

- (a) Trouver une matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$.
- (b) En déduire que $X_n = M^n X_0$.
- (c) Calculer M^n .
- (d) En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n .