Chapitre 4

Applications linéaires

4.1 Définitions

Définition 4.1. *Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. On dit que $f : E \to F$ est linéaire (ou est un morphisme d'espace vectoriel) si :*

(1) $\forall x, y \in E$, on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$;

(2) $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E$, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Proposition 4.2. [Caractérisation usuelle des applications linéaires] : *Soit $f : E \to F$. L'application f est linéaire, si et seulement si , $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\forall x, y \in E$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.*

Exemple 4.3. *Soit $f : E \to F$ définie par $f : x \mapsto 0_F$. L'application f est linéaire.*

Proposition 4.4. *Soient $E, E_1, \ldots E_n$, $(n \in \mathbf{N}^*)$ des κ espaces vectoriels. L'application*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & E & \to & E_1 \times \cdots \times E_n \\ & & x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_n(x)). \end{array}$$

f est linéaire de E dans $E_1 \times \cdots \times E_n$, si et seulement si, $f_1, \ldots, f_n$ sont des applications linéaires de respectivement de E dans $E_1, \ldots,$ de E dans E_n.

Exemple 4.5. *Montrons que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y, 2y)$ est une application linéaire. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, et $a = (x,y), b = (x',y') \in \mathbf{R}^2$,*

$$\begin{aligned} f(\lambda a + \mu b) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y', 2\lambda y + 2\mu y') \\ &= \lambda(x+y, x-y, 2y) + \mu(x'+y', x'-y', 2y') \\ &= \lambda f(a) + \mu f(b). \end{aligned}$$

Proposition 4.6. *Soient $(E,+,.)$, $(F,+,.)$, $(G,+,.)$ des $\mathbf{K}$- espaces vectoriels.*

(1) Si l'application $f : E \to F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$;

(2) Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires alors $g \circ f : E \to G$ est linéaire.

(3) Si $u_1, \ldots u_n$ sont des vecteurs de E alors $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, $f(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(u_k)$.

4.2 Applications linéaires particulières

Formes linéaires

Définition 4.7. *On appelle forme linéaire sur un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E*, toute application linéaire de* E *dans* $\mathbf{K}$*. On note* $\mathcal{L}(E)$*, au lieu de* $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$*, l'ensemble des formes linéaires sur* E*.*

Exemple 4.8. *Pour* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$ *fixé, l'application* $f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ *définie par* $f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ *est une forme linéaire sur* $\mathbf{K}^n$*. En effet, c'est une application de* $\mathbf{K}^n$ *vers* $\mathbf{K}$ *et c'est aussi une application linéaire car on vérifie aisement que* $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x, y \in \mathbf{K}^n$*, on a* $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$*.*

Endomorphisme

Définition 4.9. *On appelle endomorphisme de* E*, toute applicatin linéaire de* E *dans lui même. On note* $\mathcal{L}(E)$ *ou* $End(E)$*, au lieu de* $\mathcal{L}(E, E)$*, l'ensemble des endomorphismes de* E*.*

Exemple 4.10. *L'application identité* $Id_E : E \to E$ *est un endomorphisme de* E*.*

Proposition 4.11. *Si* f *et* g *deux endomorphismes de* E*, alors* $g \circ f$ *est aussi un endomorphisme de* E*.*

Isomorphisme

Définition 4.12. *On appelle isomorphisme d'un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel* E *vers un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* F *toute application linéaire bijective de* E *vers* F*. On note* $\mathrm{Iso}(E, F)$ *l'ensemble des isomorphismes de* E *dans* F*.*

Exemple 4.13. *L'application* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ *définie par* $f(a, b) = a + ib$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{R}$*-espace vectoriel. En effet, cette application est* $\mathbf{R}$*-linéaire et bijective.*

Proposition 4.14. *Si* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *sont des isomorphismes alors la composée* $g \circ f : F \to G$ *est un isomorphisme.*

Proposition 4.15. *Si* $f : E \to F$ *est un isomorphisme alors son application réciproque* $f^{-1} : F \to E$ *est un isomorphisme.*

Exemple 4.16. *L'application* $g : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2$ *définie par* $g : z \mapsto (\Re(z), \mathrm{Im}(z))$ *est l'isomorphisme réciproque de l'application* $f : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mapsto a + ib \in \mathbf{C}$.

Automorphisme

Définition 4.17. *On appelle automorphisme de* E*, tout endomorphisme bijectif de* E*. On note* $\mathrm{Gl}(E)$ *l'ensemble d'automorphisme de* E*.*

Proposition 4.18. *Si* $f : E \to E$ *et* $g : E \to E$ *sont des automorphismes de* E *alors la composée* $g \circ f : E \to E$ *est un automorphisme.*

Proposition 4.19. *Si* $f : E \to E$ *est un automorphisme alors son application réciproque* $f^{-1} : E \to E$ *est un automorphisme.*

4.2.1 Noyau et image d'une application linéaire

Théorème 4.20. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. *Si V est un sous-espace vectoriel de E alors $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.*
2. *Si W est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition 4.21. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

(1) On appelle image de f *l'espace* $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x), x \in E\}$.

(2) On appelle noyau de f *l'espace* $\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.

Proposition 4.22. *(1)* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

(2) $\ker f$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque 4.23. *(1) Pour déterminer l'image d'une application linéaire f, on détermine les valeurs prises par f, i.e., les $y \in F$ tels qu'il existe $x \in E$ pour lequel $y = f(x)$. En pratique, l'image de f est engendré par l'image d'une base de E. C'est-à-dire pour toute $B = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de E*

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n))$$

(2) Pour déterminer le noyau d'une application linéaire f, on résout l'equation $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$.

Définition 4.24. *Soient E et F deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle Rang de f la dimension du sous-espaces vectoriel* $\operatorname{Im}(f)$*. On le note $rg(f)$.*

Corollaire 4.25. *Pour toute application linéaire f de $\mathcal{L}(E, F)$. On a $rg(f) \leqslant \dim(E)$.*

Exemple 4.26. *Déterminons le noyau et l'image de l'aaplication linéaire $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$. On a*

$\ker f = \{0, 0)\}$
$\operatorname{Im} f = \{(x, x) + (-y, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} = \operatorname{vect}((1, 1), (-1, 1)) = \mathbf{R}^2$.

Théorème 4.27. *Si $f : E \to F$ est une application linéaire alors*

(1) f est surjective, si et seulement si, $\operatorname{Im} f = F$

(2) f est injective, si et seulement si, $\ker f = \{0_E\}$.

Théorème 4.28 (Théorème du rang)**.** *Soient E et F deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels et f de E dans F linéaire. On a*

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(f)$$