| | | |
|---|---|---|
| CY TECH | **Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année**<br>**Devoir maison**<br>*M. Bahtiti, K. Guezguez, A. Hajej, B. Laquerriere, J.-M. Masereel* | |
| | *Matière* : **Algèbre** | *Date* : **Vendredi 9 avril 2021** |
| | **Appareils électroniques et documents interdits** | *Durée* : **15 jours** |
| | | *Nombre de pages* : **5** |

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.**

*Le sujet comporte deux exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

⋄⋄⋄

**Exercice 1.** Soit $f_1$ l'application définie par :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y\,;z\,;t) & \longmapsto & 5x-2y+z+4t \end{array} \right.$$

et $f$ l'application définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ (x\,;y\,;z\,;t) & \longmapsto & \big(f_1(x,y,z,t)\ ;\ 5x+y+2z+3t\ ;\ x+2y+z\ ;\ 4x-y+z+3t\ ;\ 3y+z-t\big) \end{array} \right.$$

1. Montrer que $f_1$ est une application linéaire.

On admet par la suite que $f$ est une application linéaire.

2. 
   (a) Déterminer une base du noyau de $f$.
   (b) Déterminer les dimension du noyau et de l'image de $f$.
   (c) Déterminer l'image de $f$.
3. L'application $f$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. Soit $F = \{(a;b;c;d;e) \in \mathbb{R}^5\ /\ a = 5c-4e \text{ et } b = 5c-3e \text{ et } d = 4c-3e\}$
   (a) Montrer que $F$ est un espace vectoriel.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = F$.
5. 
   (a) Compléter la base trouvée en 2.(a) en une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) En déduire un supplémentaire du noyau.
6. Soit $H = \mathrm{Vect}((0;0;1;0);(0;0;0;1))$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) \oplus H$.
   (b) Montrer que $\varphi((0;0;1;0)) = (5;0;-3;3;-5)$ et $\varphi((0;0;0;1)) = (0;5;4;1;5)$ suffit à définir/déterminer une application linéaire $\varphi$ de $H$ dans $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Donner une définition de $\varphi$ avec des équations. / ou car pas fait en TD / Montrer que

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ (0;0;z;t) & \longmapsto & (5z\,;5t\,;4t-3z\,;3z+t\,;5t-5z) \end{array} \right.$$

(d) L'application $\varphi$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

(e) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$.

⋄⋄⋄

1. (1 point(s).) On montre aisément que $f_1(u+\lambda v)=f(u)+\lambda f(v)$.

2.

(a) (1 point(s).) $f\big(x\,;y\,;z\,;t\big)=(0;0;0;0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ 3y+z-t &= 0 \end{cases}$ (après réduction du système).

Donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Cette famille est génératrice et comme elle est libre (vecteurs non colinéaires) c'est une base.

(b) (0.5 point(s).) Le noyau est donc de dimension 2. L'image est alors, d'après le théorème du rang, de dimension 4-2=2.

(c) (1 point(s).) Nous savons que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\big(f(e_1);f(e_2);f(e_3);f(e_4)\big)$. La dimension étant 2, il suffit donc de prendre 2 vecteurs non colinéaires dans cette famille pour avoir une base.
$f(e_1)=\begin{pmatrix}5\\5\\1\\4\\0\end{pmatrix}$ et $f(e_2)=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils forment une base de l'image de $f$ et

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}5\\5\\1\\4\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$$

3. (0.5 point(s).) L'application ne peut pas être surjective puisque l'on va d'un espace de dimension 4 à un espace de dimension 5. Elle n'est pas injective puisque le noyau n'est pas réduit au vecteur nul. Elle n'est donc pas non plus bijective.

4. (1 point(s).)

(a) Nous avons :

— $F\subset\mathbb{R}^5$ par définition.

— $(0;0;0;0;0)\in F$.

— On montre, en rédigeant correctement que $f$ est stable par combinaison linéaire.

Donc $F$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

(b) (1.5 point(s).) Plusieurs méthodes (de la plus calculatoire à la moins calculatoire, ou de la moins bonne maîtrise du cours à la meilleure maîtrise) :

— On cherche une base de $F$ à partir de ses équations et on montre que chacune est combinaison linéaire de l'autre.

— On constate que $\begin{pmatrix}5\\5\\1\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$ sont dans $F$. Nous pouvons donc affirmer (par stabilité de $F$) que $\mathrm{Im}(f)\subset F$. Il reste donc à montrer l'inclusion réciproque. Pour cela, on peut chercher une base de $F$ (comme au point précédent) et on montre que les vecteurs de cette base sont combinaisons linéaires de celle de $\mathrm{Im}(f)$.

— Toujours en partant de la constatation précédente ($\mathrm{Im}(f) \subset F$), on remarque que la dimension de $F$ est égale au nombres d'inconnues moins le rang du système, c'est-à-dire $5-3=2$. D'où l'égalité sans faire un seul calcul de base.

5.

(a) (1.5 point(s).) D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre avec les vecteurs de la base canonique. On constate que les deux premiers conviennent : $\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix};\right.$ est une famille libre :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 &=& 0\\ \lambda_1+\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_2 &=& 0\\ 3\lambda_2+\lambda_3 &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$$

Il semblerait que n'importe quelle paire de vecteurs canoniques fonctionne.

(b) (0.5 point(s).) Donc un supplémentaire du noyau est tout simplement $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

6.

(a) (1 point(s).) De la même manière, comme dit dans la question précédente, la famille

$$\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

est libre. Elle forme donc une base de $\mathbb{R}^4$, constituée d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $H$. Donc $H$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont donc bien supplémentaires.

(b) (0.5+0.5 point(s).) Nous savons qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Nous avons ici l'image de la base de $H$, donc l'application linéaire $\varphi$ est entièrement déterminée (unique). On constate de plus que ces deux vecteurs images vérifient les équations de $F=\mathrm{Im}(f)$. Donc $\varphi$ est bien à valeur dans $\mathrm{Im}(f)$.

(c) (0.5 point(s).) Soit $u=(0;0;z;t)\in H$, alors $\varphi(u)=z\varphi(0,0,1,0)+t\varphi(0,0,0,1)=z\begin{pmatrix}5\\0\\-3\\3\\-5\end{pmatrix}+$

$$t\begin{pmatrix}0\\5\\4\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5z\\5t\\4t-3z\\3z+t\\5t-5z\end{pmatrix}$$

(d) (0.5 point(s).) L'image de la base de $H$ étant une base de $\mathrm{Im}(f)$, on en déduit que l'application est bijective (théorème de cours). (Ou alors on montre qu'elle est injective en calculant son noyau, et comme les espaces de départ et d'arrivée sont de dimension 2, c'est bijectif).

**Exercice 2.** On note $\mathcal{B}_c = (e_1\,;e_2\,;e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1\,;u_2\,;u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Soit $u = \left(x\,;y\,;z\right)$ dans la base canonique. Déterminer les coordonnées de $u$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Soit $v = (a\,;b\,;c)$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $v$ dans la base canonique.
2. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; x + y - z = 0 \right\}$.
   (a) Déterminer une base de $F$.
   (b) Soit $G = \mathrm{Vect}(u_3)$. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3.
   (a) Montrer que $\varphi(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\varphi(0,1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\varphi(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ suffit à définir une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer $\varphi(x,y,z)$, pour $\left(x\,;y\,;z\right) \in \mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de $\varphi$.
   (d) L'application $\varphi$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (e) Déterminer $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$ et $\varphi(u_3)$.
   (f) Soit $v = (a\,;b\,;c)$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer $\varphi(v)$ dans cette même base.
   (g) Déterminer $\varphi \circ \varphi(x,y,z)$.

   *Remarque :* On dit que $\varphi$ est la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $F$ parallèlement à $G$.
4. Soit l'application linéaire $s$ définie par $s(1,0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $s(0,1,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $s(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Reprendre toutes les questions de la question précédente, avec $s$.
   *Remarque :* On dit que $s$ est la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

⋄⋄⋄

1.
   (a) Nous avons trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, donc il suffit de montrer qu'elle est libre.
   (b) Nous avons

$$\begin{cases} u_1 &= e_2 + e_3 \\ u_2 &= e_1 - e_2 \\ u_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

   D'où

$$\begin{cases} e_1 &= u_3 - u_1 \\ e_2 &= u_3 - u_2 - u_1 \\ e_3 &= 2u_1 + u_2 - u_3 \end{cases}$$

   Ainsi, $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (2z - x - y)u_1 + (z - y)u_2 + (x + y - z)u_3$. Les coordonnées de $u$ dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $\left(2z - x - y\,;z - y\,;x + y - z\right)$.

(c) De même, $v = a u_1 + b u_2 + c u_3 = (b+c)e_1 + (a-b+c)e_2 + (a+c)e_3$. Les coordonnées de $v$ dans la base canonique sont donc $(b+c\,; a-b+c\,; a+c)$.

2.

(a) En résolvant le système (à une équation), on montre que $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(u_1; u_2)$ (base de $F$).

(b) L'union des bases de $F$ et de $G$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

3.

(a) Une application linéaire est entièrement déterminer par l'image d'une base.

(b) $\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} z-y \\ z-x \\ 2z-x-y \end{pmatrix}$

(c) $\text{Ker}(\varphi) = G$ et $\text{Im}(\varphi) = F$.

(d) L'application n'est ni injective ni surjective (donc pas bijective).

(e) $\varphi(u_1) = u_1$, $\varphi(u_2) = u_2$ et $\varphi(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(f) $\varphi(v) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2) + c\varphi(u_3) = a u_1 + b u_2$. Donc les coordonnées de $\varphi(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(a\,; b\,; 0)$.

(g) $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

4.

(a) Une application linéaire est entièrement déterminer par l'image d'une base.

(b) $s(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x-2y+2z \\ -2x-y+2z \\ -2x-2y+3z \end{pmatrix}$

(c) $\text{Ker}(s) = \{\vec{0}\}$ et $\text{Im}(s) = \mathbb{R}^3$.

(d) L'application est bijective.

(e) $s(u_1) = u_1$, $s(u_2) = u_2$ et $s(u_3) = -u_3$.

(f) $s(v) = a s(u_1) + b s(u_2) + c s(u_3) = a u_1 + b u_2 - c u_3$. Donc les coordonnées de $s(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(a\,; b\,; -c)$.

(g) $s \circ s = Id_{\mathbb{R}^3}$.