karam.fayad@eisti.eu

Corrigé DS5 Algèbre (05/03/2019)

Exercice 1 .

1. On a $V = \{a \cdot (4,2,1,0) + b \cdot (0,0,0,1),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((4,2,1,0),(0,0,0,1))$.
   Ainsi, V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$: c'est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $((4,2,1,0),(0,0,0,1))$.

   Montrons que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:
   On a : $(0,0,0,0) \in W$.
   Soit $X = (x,y,z,t)$ et $X' = (x',y',z',t')$ deux vecteurs de W et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda \cdot X + X' \in W$.
   Comme $(X,X') \in W^2$, on a $x+z = y+t$ et $x'+z' = y'+t'$.
   On a $\lambda \cdot X + X' = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$ avec :

   $$(\lambda x + x') + (\lambda z + z') = \lambda(x+z) + (x'+z') = \lambda(y+t) + (y'+t') = (\lambda y + y') + (\lambda t + t').$$

   Ainsi, $\lambda \cdot X + X' \in W$.

2. Par définition de V, la famille $((4,2,1,0),(0,0,0,1))$ en est une famille génératrice, de plus, cette famille est libre ; c'est donc une base de V, et $\dim(V) = 2$.

   Cherchons une base de W :
   Soit $X = (x,y,z,t) \in W$, alors $x+z = y+t$ d'où $x = y+t-z$, alors

   $$X = (y+t-z,y,z,t) = y \cdot (1,1,0,0) + z \cdot (-1,0,1,0) + t \cdot (1,0,0,1).$$

   Ainsi, $W \subset \text{vect}((1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1))$.
   Réciproquement, $(1,1,0,0) \in W$, $(-1,0,1,0) \in W$ et $(1,0,0,1) \in W$, d'où

   $$W = \text{vect}((1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1)).$$

   Montrons que la famille $((1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1))$ est libre :
   Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\cdot(1,1,0,0)+b\cdot(-1,0,1,0)+c\cdot(1,0,0,1) = 0$, alors $(a-b+c,a,b,c) = (0,0,0,0)$ d'où $a = b = c = 0$.
   On déduit que la famille $((1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1))$ est une base de W, et $\dim(W) = 3$.

   Cherchons une base de $V \cap W$:
   Soit $X = (x,y,z,t) \in V \cap W$:
   • $X \in V \Rightarrow x = 4z$ et $y = 2z$
   • $X \in W \Rightarrow x = y+t-z$
   On obtient ainsi $4z = 2z + t - z$, d'où $t = 3z$ et $X = (4z,2z,z,3z) = z \cdot (4,2,1,3)$, on déduit que $V \cap W \subset \text{vect}((4,2,1,3))$. Réciproquement, $(4,2,1,3) \in V \cap W$, ainsi $V \cap W = \text{vect}((4,2,1,3))$.
   Le vecteur $(4,2,1,3)$ forme donc une base de $V \cap W$, et $\dim(V \cap W) = 1$.

3. On a $\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 2+3-1 = 4$.
   $V \cap W$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, de dimension 4. On en déduit que $V + W = \mathbb{R}^4$.

Exercice 2 .

1. On a clairement $0 \in G$.
   Soit $(P,Q) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda \cdot P + Q \in G$.
   Comme $(P,Q) \in G^2$, alors $P(1) = P'(1) = Q(1) = Q'(1) = 0$, d'où :
   $(\lambda \cdot P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$ et $(\lambda \cdot P + Q)'(1) = \lambda P'(1) + Q'(1) = 0$. Ainsi, $\lambda \cdot P + Q \in G$.

2. Cherchons une base de G (afin de calculer la dimension de G) :
   Soit $P \in G$, alors $P(1) = P'(1) = 0$, alors 1 est une racine au moins double de P, donc P est divisible par $(X-1)^2$. Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-1)^2 Q$, avec $\deg(Q) \leq 1$ car $\deg(P) \leq 3$.
   Le polynôme Q s'écrit alors $a+bX$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, d'où $P = (X-1)^2(aX+b) = aX(X-1)^2 + b(X-1)^2$.
   On en déduit que $G \subset \mathrm{vect}((X(X-1)^2, (X-1)^2)$.
   Réciproquement, $X(X-1)^2 \in G$ et $(X-1)^2 \in G$ car ces deux polynômes sont divisibles par $(X-1)^2$., d'où
   $$G = \mathrm{vect}((X(X-1)^2, (X-1)^2)).$$
   De plus, la famille $((X(X-1)^2, (X-1)^2)$ est libre (famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts), c'est donc une base de G et $\dim(G) = 2$.

   Montrons maintenant que la famille $((X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de G :
   On a clairement $(X-1)^2 \in G$ et $(X-1)^3 \in G$ car ces deux polynômes sont divisibles par $(X-1)^2$.
   La famille $((X-1)^2, (X-1)^3)$ est donc une famille libre (degrés distincts) de deux vecteurs de G, et comme G est de dimension 2, on en déduit qu'il s'agit d'une base de G.
3. Comme F est de dimension 2, il suffit de remarquer que la famille $(1, X-1)$ est une famille libre de vecteurs F, ce qui est clair (degrés distincts).
4. Il suffit de vérifier deux parmi les trois conditions suivantes :
   • $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}_3[X])$
   • $F + G = \mathbb{R}_3[X]$
   • $F \cap G = \{0\}$

   En effet :
   • On a $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.
   • $F + G = \mathrm{vect}(1, X-1) + \mathrm{vect}((X-1)^2, (X-1)^3) = \mathrm{vect}(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3) = \mathbb{R}_3[X]$
   car la famille $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une famille libre contenant 4 vecteurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension 4, elle engendre donc $\mathbb{R}_3[X]$.
   • Soit $P \in F \cap G$, alors il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = a + b(X-1)$ et $P = c(X-1)^2 + d(X-1)^3$, ainsi $a + b(X-1) - c(X-1)^2 - d(X-1)^3 = 0$, d'où $a = b = c = d = 0$ car la famille $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est libre. On en déduit que $P = 0$.
5. (a) On cherche $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = a + b(X-1) + c(X-1)^2 + d(X-1)^3$, d'où
   $$1 + X + X^2 + X^3 = (a - b + c - d) + (b - 2c + 3d)X + (c - 3d)X^2 + dX^3.$$
   D'où le système
   $$\begin{cases} d = 1 \\ c - 3d = 1 \\ b - 2c + 3d = 1 \\ a - b + c - d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = 4 \\ b = 6 \\ a = 4 \end{cases}$$
   On déduit que
   $$1 + X + X^2 + X^3 = 4 + 6(X-1) + 4(X-1)^2 + (X-1)^3.$$
   (b) De la question précédente, on déduit directement que $P = P_1 + P_2$ avec :
   • $P_1 = 4 + 6(X-1) \in F$
   • $P_2 = 4(X-1)^2 + (X-1)^3 \in G$.

Exercice 3 .

1. Il faut que $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) + \mathrm{rg}(\mathscr{F}') < 3$.
   On prend par exemple $\mathscr{F}$ la famille formée par le vecteur $(1,0,0)$ et $\mathscr{F}'$ la famille formée par le vecteur $(0,1,0)$.
   On a clairement $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) \cap \mathrm{vect}(\mathscr{F}') = \{0\}$ mais $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) + \mathrm{vect}(\mathscr{F}') = \mathrm{vect}((1,0,0),(0,1,0)) \neq \mathbb{R}^3$.

2. Il faut que $\text{vect}(\mathscr{F}) \cap \text{vect}(\mathscr{F}') \neq \{0\}$.
   On prend par exemple $\mathscr{F} = ((1,0,0),(0,1,0))$ et $\mathscr{F}' = ((0,1,0),(0,0,1))$.
   On a $\text{vect}(\mathscr{F}) + \text{vect}(\mathscr{F}') = \text{vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$ mais $\text{vect}(\mathscr{F}) \cap \text{vect}(\mathscr{F}') = \text{vect}((0,1,0))$.
3. On prend $\mathscr{F} = ((1,0,0),(0,1,0))$ et $\mathscr{F}' = ((0,0,1))$.
   On a $\dim(\text{vect}(\mathscr{F})) + \dim(\text{vect}(\mathscr{F}')) = \text{rg}(\mathscr{F}) + \text{rg}(\mathscr{F}') = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ et $\text{vect}(\mathscr{F}) + \text{vect}(\mathscr{F}') = \text{vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$, ainsi $\text{vect}(\mathscr{F})$ et $\text{vect}(\mathscr{F}')$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 .

1. (a) On a $F \oplus G = \text{vect}(u_1, \cdots, u_m) + \text{vect}(v_1, \cdots, v_n) = \text{vect}(u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n)$, ainsi, la famille $(u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n)$ engendre $F \oplus G$.
   Montrons que cette famille est libre :
   Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{m+n}$ tel que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0$. On a alors
   $$\underbrace{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m}_{\in F} = \underbrace{-(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n)}_{\in G} \in F \cap G = \{0\}.$$
   On en déduit que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0$ et $\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0$; comme les familles $(u_1, \cdots, u_m)$ et $(v_1, \cdots, v_n)$ sont libres, on déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$.
   Ainsi, la famille $(u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n)$ est libre. C'est donc une base de $F \oplus G$.

   (b) Dans la question précédente, on a trouvé une base de $F \oplus G$ contenant $m+n$ vecteurs. On déduit que
   $$\dim(F \oplus G) = m + n = \dim(F) + \dim(G).$$
   C'est la formule de Grassmann dans le cas où F et G sont en somme directe (car $F \cap G = \{0\}$).

2. (a) On a : $F = (F \cap G) \oplus H$, d'où
   $$\dim(F) = \dim((F \cap G) \oplus H) = \dim(F \cap G) + \dim(H)$$
   car $F \cap G$ et H sont en somme directe (on peut donc appliquer le résultat de la question 1).

   (b) Comme G est un sous-espace vectoriel de E, et $G \subset F + G$, alors G est un sous-espace vectoriel de $F + G$.
   Comme H est un sous-espace vectoriel de F, et $H \subset F \subset F + G$, alors H est un sous-espace vectoriel de $F + G$.

   (c) Montrons que $G \cap H = \{0\}$.
   Soit $x \in G \cap H$. Comme $H \subset F$, alors $x \in F$, ainsi, $x \in H$ et $x \in F \cap G$, or H et $F \cap G$ sont en somme directe, d'où $x = 0$.
   Ou : comme $H \subset F$, alors $G \cap H \subset (F \cap G) \cap H = \{0\}$. Ainsi, $G \cap H = \{0\}$.

   (d) G et H étant des sous-espaces vectoriels de $F + G$, on a : $G + H \subset F + G$.
   Réciproquement, montrons que $F + G \subset G + H$.
   Soit $x \in F + G$, alors il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.
   Or $F = (F \cap G) + H$; comme $y \in F$, alors il existe $(t, u) \in (F \cap G) \times H$ tel que $y = t + u$.
   Ainsi $x = z + t + u$ avec $z \in G$, $t \in F \cap G \subset G$ et $u \in H$. D'où
   $$x = \underbrace{z + t}_{\in G} + \underbrace{u}_{\in H} \in G + H.$$

   (e) Des deux questions précédentes, on déduit que G et H sont supplémentaires dans $F + G$, autrement dit : $F + G = G \oplus H$.

   (f) Comme G et H sont en somme directe, d'après la question 1, on a $\dim(G \oplus H) = \dim(G) + \dim(H)$.
   D'autre part, d'après la question 2a, on a $\dim(H) = \dim(F) - \dim(F \cap G)$.
   Ainsi,
   $$\begin{aligned}\dim(F + G) &= \dim(G \oplus H) \\ &= \dim(G) + \dim(H) \\ &= \dim(G) + \dim(F) - \dim(F \cap G)\end{aligned}$$