



Préing 1 : MI3, MI6 et MEF1

Devoir Surveillé 1

Matière : Algèbre II

L'usage de tout appareil électronique est interdit.

Le barème est donné à titre indicatif

Date : Mardi 5 Mars 2024

Durée : 1h

Nombre de pages : 1

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.



Exercice 1. (Questions de cours). (3,5 points)

Soient $(G, *)$ et (H, \perp) deux groupes et f un morphisme de G dans H .

- Rappeler la définition d'un morphisme de groupes.
- Soit K un sous-groupe de G .
 - Rappeler la définition d'un sous-groupe.
 - Montrer que $f(K)$ est un sous-groupe de (H, \perp) .

Exercice 2. (6 points)

- On munit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la loi définie par :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

- Montrer que la loi $*$ est commutative.
 - Montrer que $*$ est associative.
 - Déterminer l'élément neutre de $*$.
 - $(G, *)$ est-il un groupe ?
- On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne \top définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \top y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = x^3$.

- Montrer que l'application ϕ est un isomorphisme de (\mathbb{R}, \top) dans $(\mathbb{R}, +)$.
- En déduire que (\mathbb{R}, \top) est un groupe commutatif.

Exercice 3. (4,5 points)

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

- Montrer que $(G, *)$ est un groupe.
- Soit $H = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. H est-il un sous-groupe de $(G, *)$?

Exercice 4. (6 points)

Soient a, b , et c des réels et (S) le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} 3x - 5y + z = a \\ x + 2y - 3z = b \\ 5x - 12y + 5z = c \end{cases}$$

- Déterminer la matrice augmentée du système.
- Échelonner la matrice augmentée en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.
- Discuter de la compatibilité du système en fonction de a, b , et c .
- Lorsque le système est compatible, trouver l'ensemble de solutions en fonction de a, b , et c et déterminer son rang.