



Préing 1
Devoir Surveillé 1
Algèbre II

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date: **Jeudi 24 Janvier 2022**

Durée: **1h30**

Nombre de pages: **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1 [5 points]

1. Soit (G, \star) un groupe. Montrer que H est un sous-groupe de (G, \star) , si et seulement si, H est non vide et pour tout x, y éléments de H , $x^{-1} \star y \in H$.
2. On note U l'ensemble de \mathbb{C} suivant :

$$U = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

Montrer que (U, \cdot) est un sous-groupe de (\mathbb{C}, \cdot) .

Exercice 2 [2 points]

Soit (G, \star) un groupe et soit $a \in G$, tel qu'il existe un entier n , tel que $a^{n+1} = a \star a \star a \cdots \star a = e$, avec e l'élément neutre de (G, \star) . On note A l'ensemble

$$A = \{e, a, a^2, \dots, a^n\}$$

Montrer que (A, \star) est un groupe commutatif.

Exercice 3 [6 points]

On note G l'ensemble de $\mathbb{R}_1[X]$ suivant

$$G = \{aX + b \in \mathbb{R}_1[X]; a \neq 0\}$$

Pour tous $P = aX + b$ et $Q = cX + d$, éléments de G , on note

$$P \star Q = acX + (ad + b)$$

1. Montrer que \star est une LCI sur G .

2. Montrer que (G, \star) est un groupe.
3. (G, \star) est-il commutatif?
4. L'objectif de cette question est de construire un sous-groupe commutatif de (G, \star) . On fixe $k \in \mathbb{R}$ et on définit

$$A_k = \{aX + k(a-1) \in G\}.$$

Montrer que A_k est un sous-groupe commutatif de (G, \star) .

Exercice 4 (7 points)

1. Déterminer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ et en utilisant le pivot de Gauss, l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$$

2. En déduire de la résolution précédente le rang de la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 [3.5 points]

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on définit le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 \\ x + y + 2z = 1 - a \end{cases}$$

1. Déterminer en fonction de a les solutions du système.
2. Pour quelles valeurs de a le système est-il de Cramer?