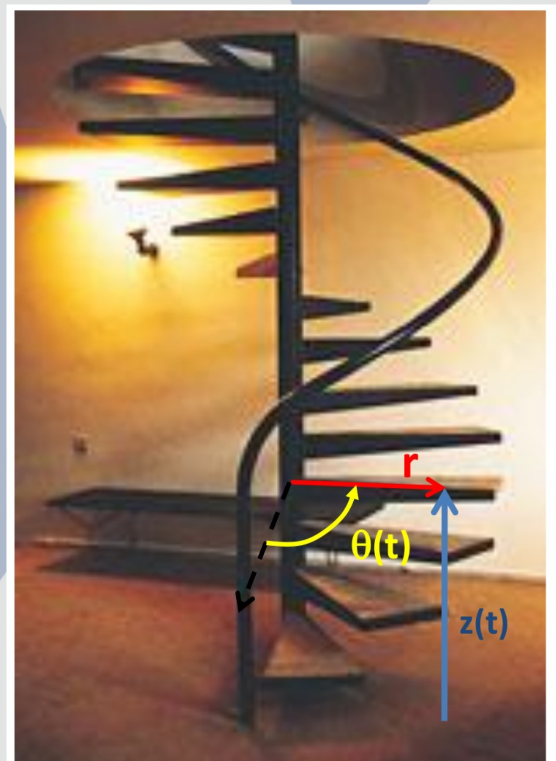
Panorama sur la Physique

Chapitre 4 – Cinématique



Présentation rédigée par Émilie Dupont (Cergy) : emilie.dupont@cyu.fr, CY308

Programme de Panorama sur la Physique

- Chapitre 1 - Introduction
- Chapitre 2 - Introduction à la pensée scientifique
- Chapitre 3 - Optique : l'étude de la lumière
- Chapitre 4 – Cinématique : la description du mouvement
- Chapitre 5 - Mécanique

Programme de Panorama sur la Physique

- Chapitre 1 - Introduction
- Chapitre 2 - Introduction à la pensée scientifique
- Chapitre 3 - Optique : l’étude de la lumière
- **Chapitre 4 – Cinématique : la description du mouvement**
- Chapitre 5 - Mécanique

Qu’est-ce que la Cinématique ?

Du grec ancien *Kinematikos* = « mouvement »

Étude du mouvement,

sans se soucier des causes qui le provoquent

4.1.1 Nature et repérage de l’espace

Qu’est-ce que la Cinématique ?

[3]

Mécanique

Mécanique newtonienne

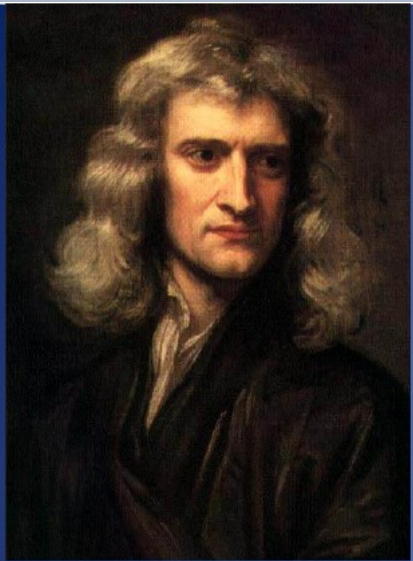
Barycentre · Cinématique · Dynamique · Énergie cinétique & potentielle · Action mécanique · Force · Moment · Torseur · Lois de Newton · Masse · Mécanique du point · Oscillateur harmonique · Repère de Frenet · Référentiel · Statique · Vitesse · »

Mécanique des fluides

Couche limite · Dynamique · Vide · Écoulement de Poiseuille & laminaire · Effet Venturi · Équations de Navier-Stokes · Fluide incompressible · Hydrostatique · Hydrodynamique · Nombre de Reynolds · Poussée d'Archimède · Pression · Théorème de Bernoulli · Viscosité · »

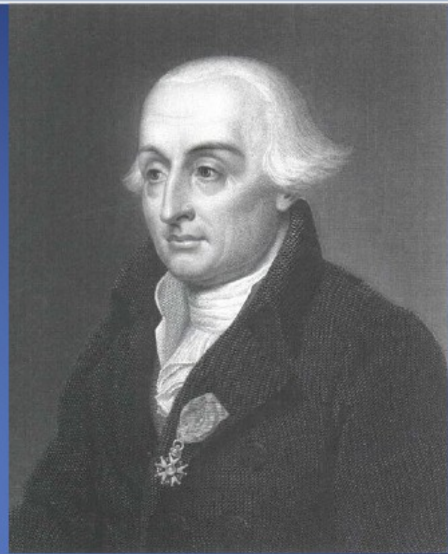
4.1.1 Nature et repérage de l’espace

Qu’est-ce que la Cinématique ?



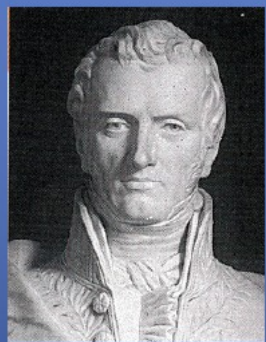
Sir Isaac Newton (1643-1727), mathématicien et physicien anglais.

Leonhard Euler (1707-1783) mathématicien et physicien suisse

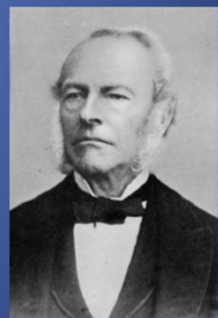


Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813) mathématicien et astronome.

Sir William Hamilton (1805-1865) mathématicien, physicien et astronome irlandais.



Claude Navier (1785-1836), ingénieur et scientifique français.



George Stokes (1819-1903) mathématicien et physicien britannique.

4.1.1 Nature et repérage de l'espace

Qu'est-ce que la Cinématique ?

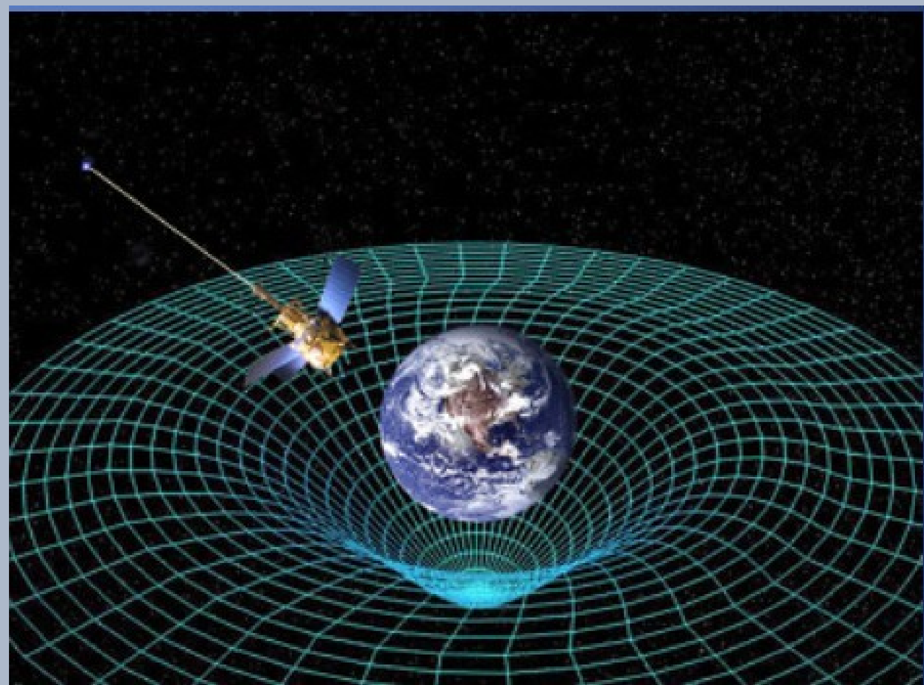
[3]

Relativité

E=mc² · Expérience de Michelson-Morley · Espace-temps · Gravitation · Onde gravitationnelle · Paradoxe des jumeaux · Paradoxe du train · Principe d'équivalence · Relativité générale & restreinte · Ligne d'univers · Simultanéité · Vitesse de la lumière · Vitesse limite · »

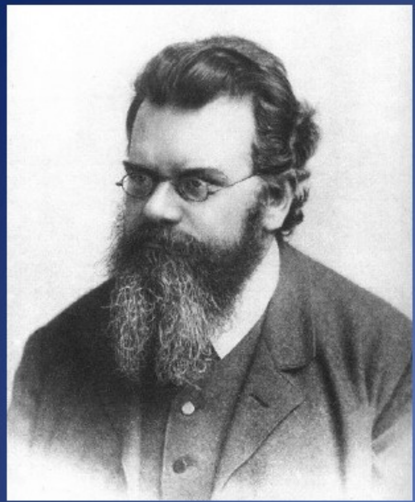
Unification

Électromagnétisme · Gravitation · Gravitation quantique à boucles · Interaction élémentaire · Interaction faible & forte · Supersymétrie · Théorie des cordes & des supercordes · Théorie M · Corde · Espace de Calabi-Yau · Brane · »

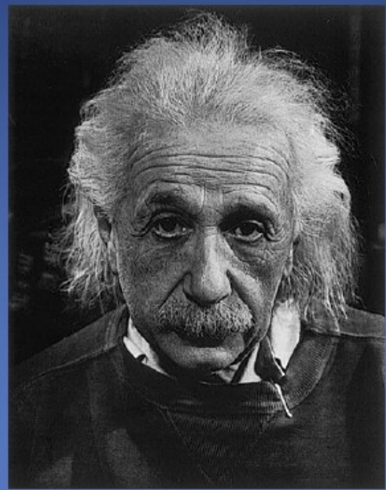


4.1.1 Nature et repérage de l'espace

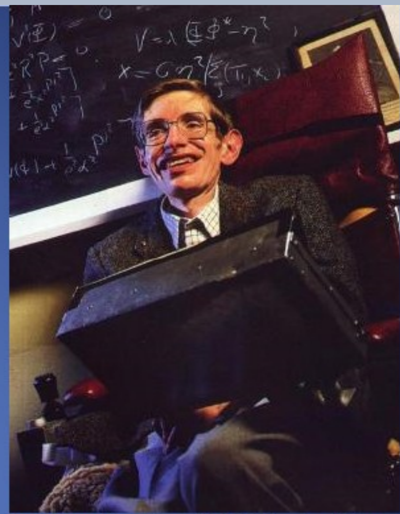
Qu'est-ce que la Cinématique ?



Ludwig Boltzmann (1844-1906), physicien autrichien



Albert Einstein (1879-1955), physicien germano-helvéto-américain



Stephen Kawking (1942-), physicien britannique

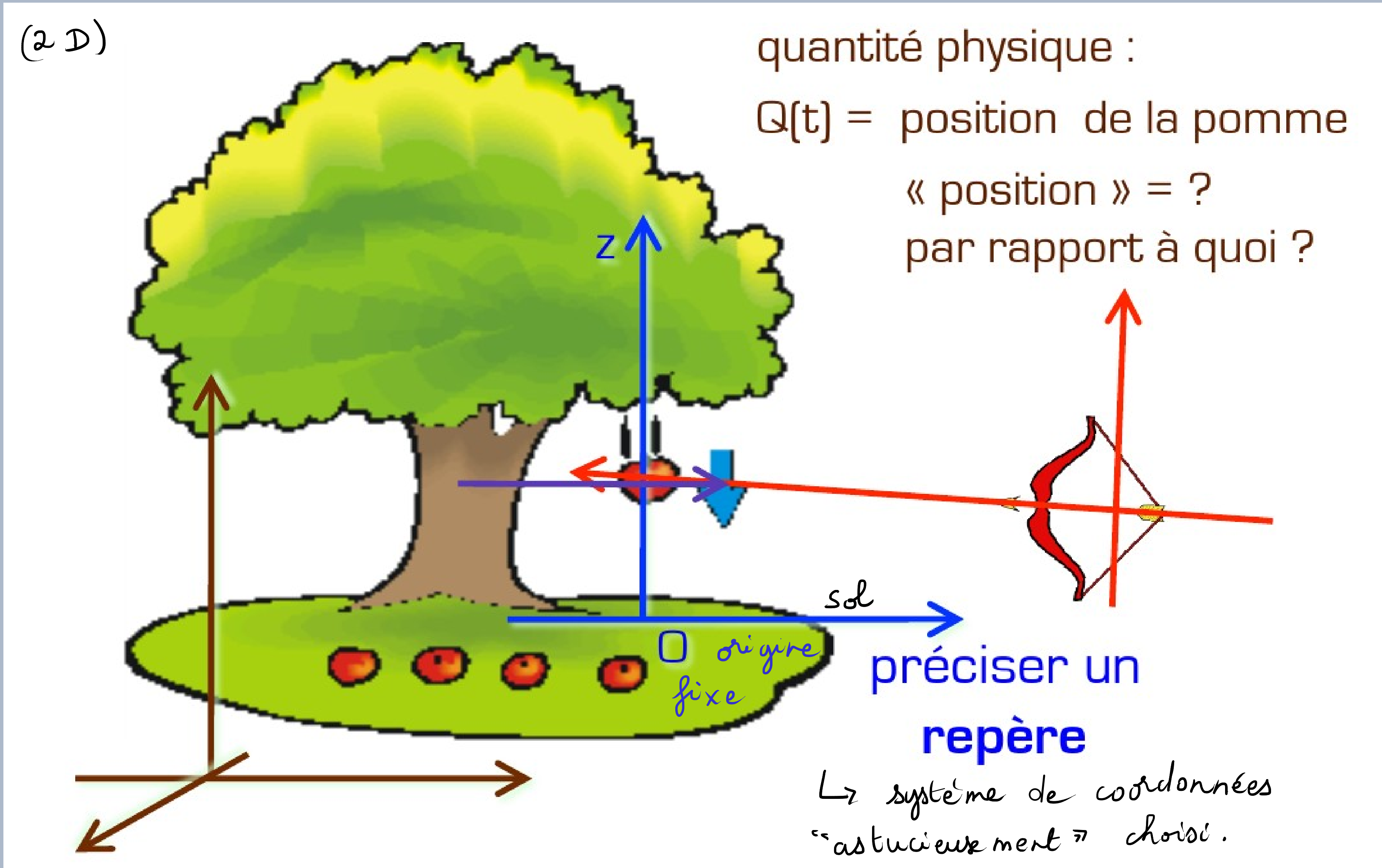
Richard Feynman (1918-1988), physicien américain

Steven Weinberg (1933-), physicien américain

Chen Ning Yang (1922-) , physicien américain d'origine chinoise, et Robert Mills (1927-1999), physicien américain

4.1.1 Nature et repérage de l'espace

Position, vitesse, accélération ... ?



4.1.1 Nature et repérage de l'espace

Position, vitesse, accélération ... ?

1) Définition des vitesses et accélération (1D)

$x(t)$ = position
$v(t) = dx/dt$ = vitesse
$a(t) = dv/dt = d^2x/dt^2$ = accélération

notation :
$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

chute libre : $m a_x = m g \Rightarrow \underline{\ddot{x} = g} =$ constante $= a$

2) $x(t) = x_0 + ½\, a\, t^2$
$v_x(t) = a\, t$, $v_x(0) = 0$
$a_x(t) = a$

mouvement uniformément accéléré :

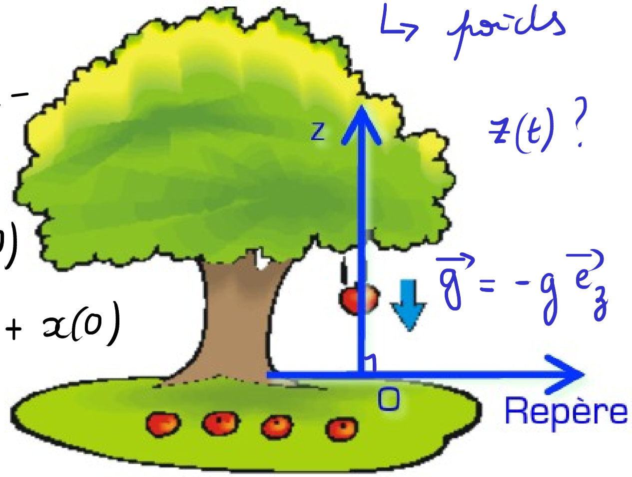
$\ddot{x} = a \longrightarrow \dot{x} = at + \dot{x}(0)$

$\longrightarrow x = \frac{1}{2} a t^2 + \dot{x}(0)\, t + x(0)$

(cas de la chute libre : a = -g)

chute libre
↳ poids

$z(t)$?



4.1.1 Nature et repérage de l'espace

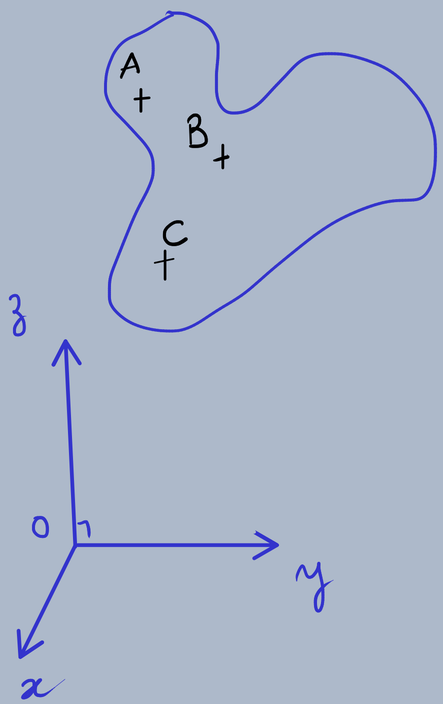
Notion de point en physique

point M en fonction du temps

définir ce qu'est un **objet ponctuel** en physique

conditions

solide est un objet matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres



$\overrightarrow{AB}$ constant

Repérer un solide dans l'espace

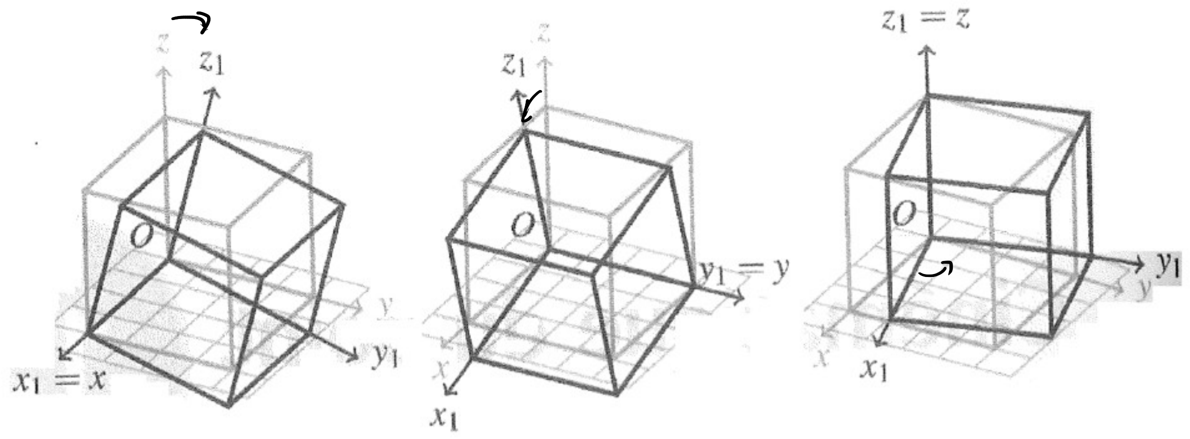
connaitre les trois coordonnées d'un point du solide → $M(x, y, z)$

en coord. cartésiennes

trois angles qui définissent l'orientation de cet objet

4.1.1 Nature et repérage de l'espace

Notion de point en physique



- Illustration des trois mouvements de rotation d'un cube dans l'espace.

Mécanique des solides, un objet :

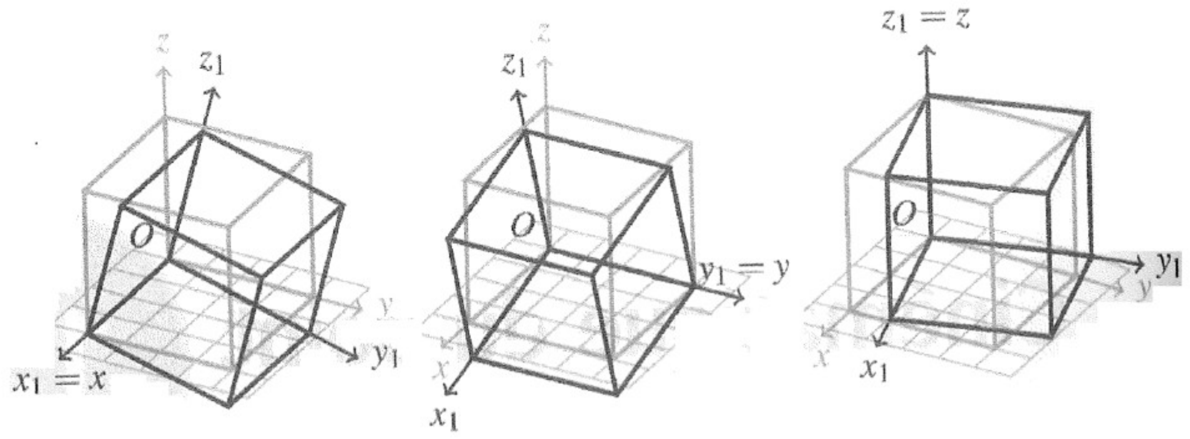
6 degrés de liberté

3 mouvements de translation
(directions x, y et z)

3 mouvements de rotation
(autour des axes Ox, Oy et Oz)

4.1.1 Nature et repérage de l'espace

Notion de point en physique



- Illustration des trois mouvements de rotation d'un cube dans l'espace.

Un **point matériel** est un solide dont on **néglige l'extension spatiale et la rotation sur lui-même**

Étude en *mécanique du point* ⇒ simplifier le problème :

Passer de **6** degrés de liberté (6 inconnues) à **3** degrés de liberté (3 inconnues)

↳ ex : x, y, z en cartésien.

4.1.1 Nature et repérage de l'espace

Quand peut-on assimiler un système à un point matériel ?

Pas de réponse simple (cf. définition) : tout dépend si on peut négliger son extension spatiale et sa rotation sur lui-même.

Exemple : mouvement orbital de la Terre autour du Soleil

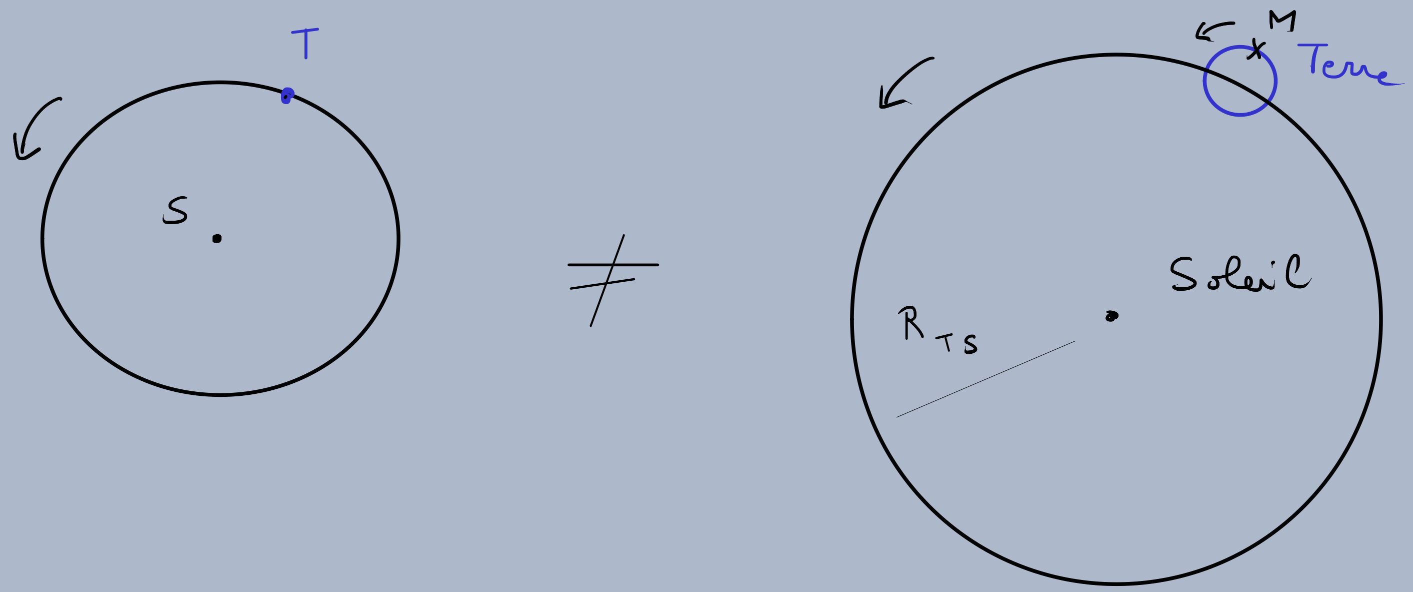
↳ Terre = point ↳ rotation de la Terre sur elle-même

→ pas de décalage dû à cette rotation

↳ Terre = solide : 6 degrés de liberté

4.1.1 Nature et repérage de l'espace

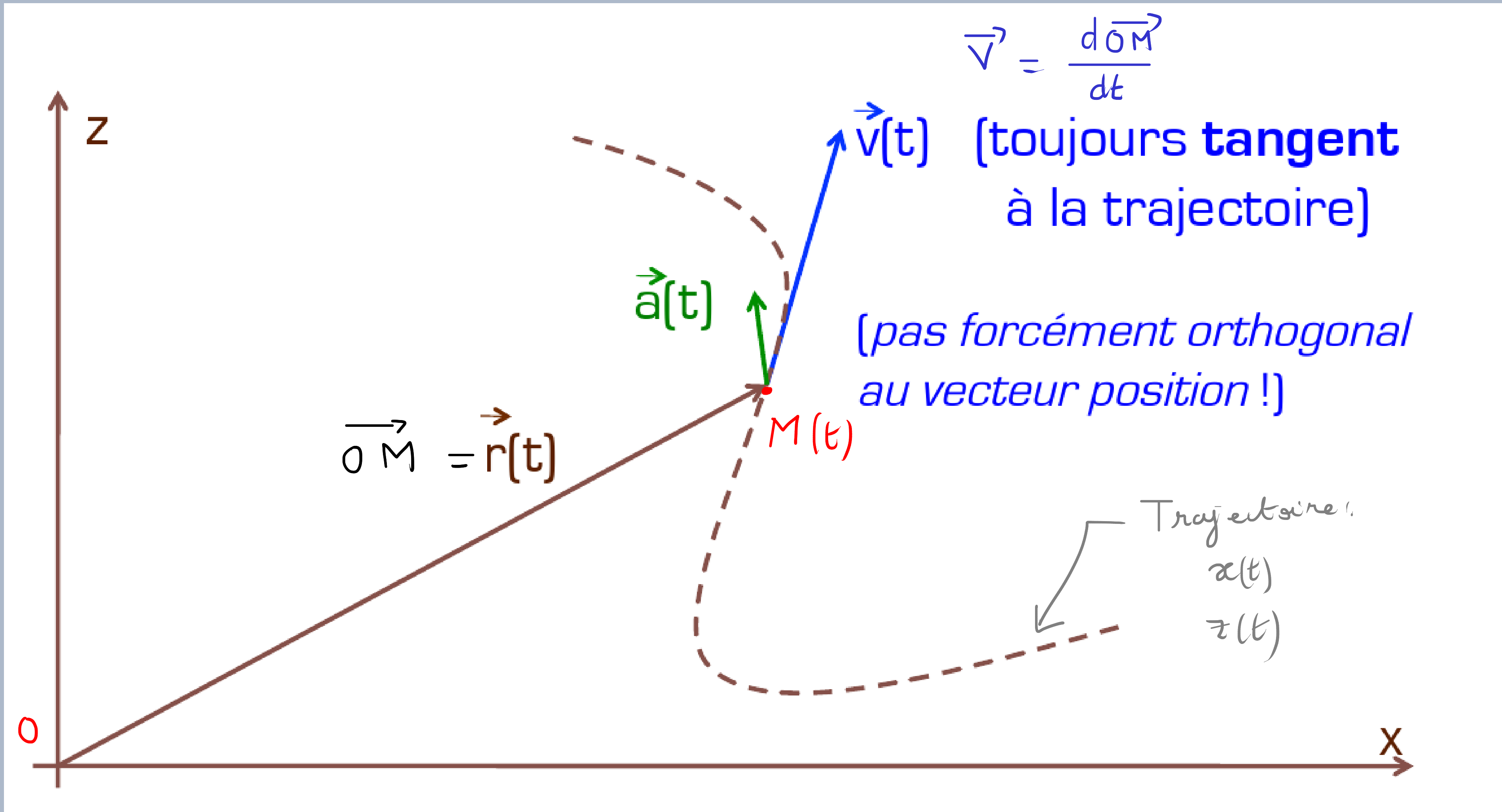
Quand peut-on assimiler un système à un point matériel ?



4.1.2 Espace et temps

Grandeurs vectorielles : vecteur position, vitesse, accélération...

[2]



(2D) = 2 dimensions.

Trajectoire de M = (x, z)

4.1.2 Espace et temps

Que fait le ballon de basket en chute libre ?

[2]

Équations horaires (en fonction de t)

(1D)

$$z(t) = z_0 - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$v(t) = -gt$$

$$a(t) = -g < 0$$

$$\begin{cases} \vec{g} = -g\,\vec{e_z} \\ \vec{a} = a_z \vec{e_z} = a\,\vec{e_z} \end{cases}$$

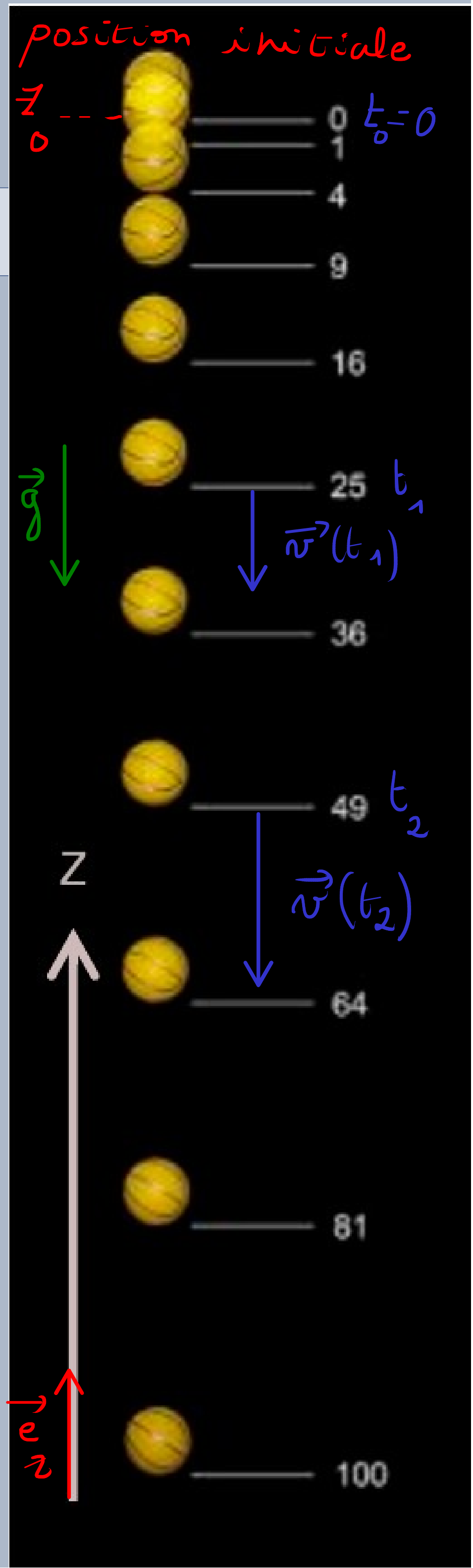
pour la chute libre dans le champ de la pesanteur:

Tout au long de la chute, le ballon

$\vec{a}$ et $\vec{v}$ de même sens (vers le bas) ←

A ACCÉLÈRE ?

B DÉCÉLÈRE ?



4.1.2 Espace et temps

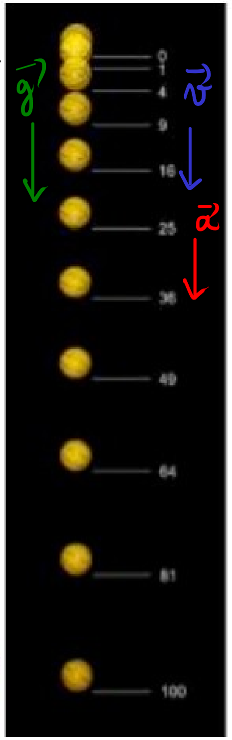
Vitesse et accélération : *grandeurs algébriques*

[2]

$\vec{a} = a_z \vec{e_z}$

O

$\vec{g}$ $\vec{v}$ $\vec{a}$



z

z augmente $a_z > 0$

$\Delta z > 0$

$v > 0$ $\vec{v} = v \vec{e_z}$

mais | v | augmente :

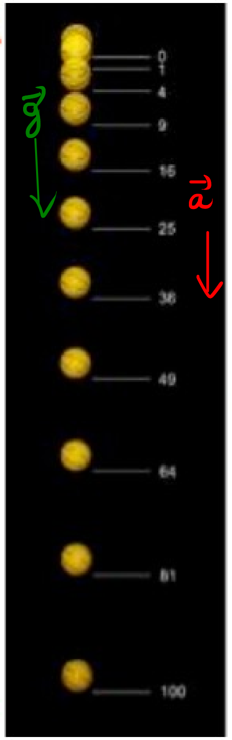
donc $\vec{a}$ a la même direction que $\vec{v}$,

a le même signe :

→ a > 0

Z

$\vec{g}$ $\vec{a}$



z diminue $a_z < 0$

$\Delta z < 0$

$v < 0$

mais | v | augmente :

donc $\vec{a}$ a la même direction que $\vec{v}$,

a le même signe :

→ a < 0

1) ont un signe qui indique le sens de leur variation

2) le signe dépend du choix du repère

3) si a et v ont le même signe, accélération

4.1.2 Espace et temps

Si la balle rebondit, elle monte puis elle descend.

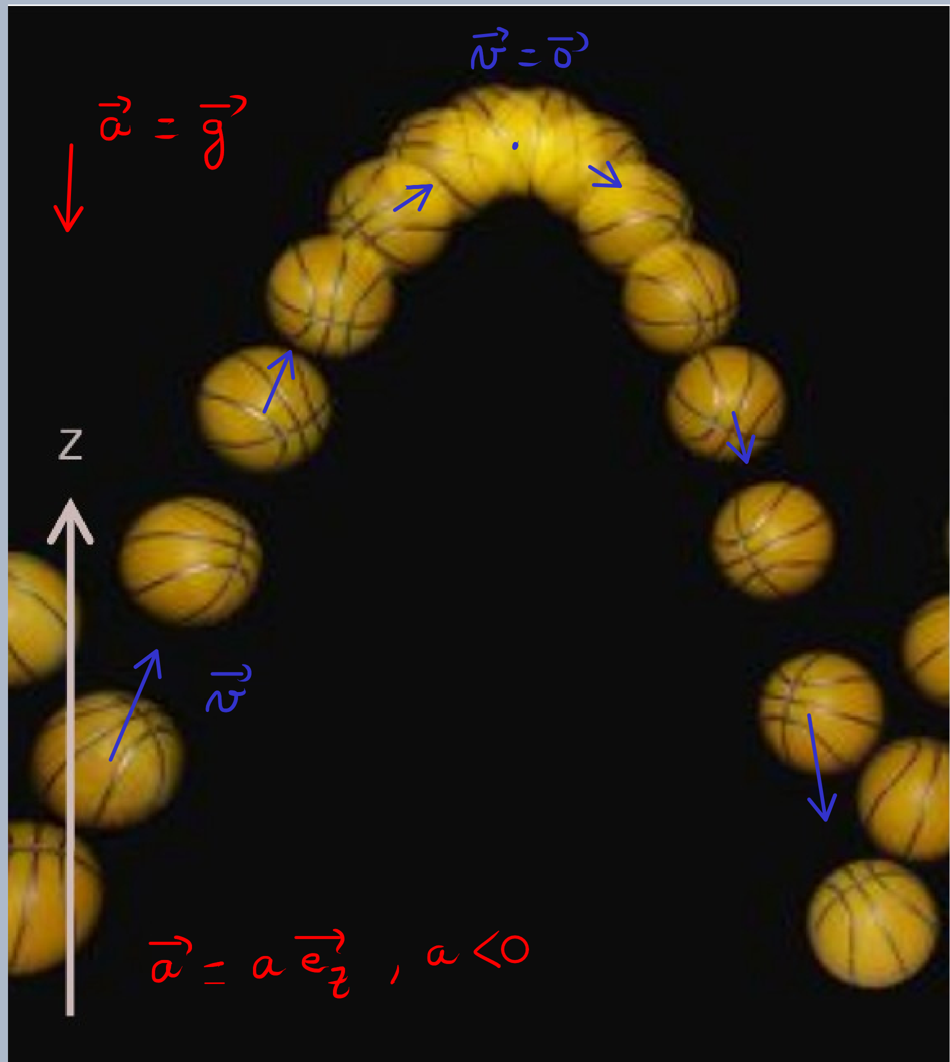
[2]

(1) Pendant la montée
(on ne regarde que le mouvement vertical) :

montée

A	$v > 0$, $a \cancel{>} 0$
B	$v > 0$, $a < 0$
C	$v \cancel{<} 0$, $a \cancel{>} 0$
D	$v < 0$, $a < 0$

décélération



4.1.2 Espace et temps

Si la balle rebondit, elle monte puis elle descend.

[2]

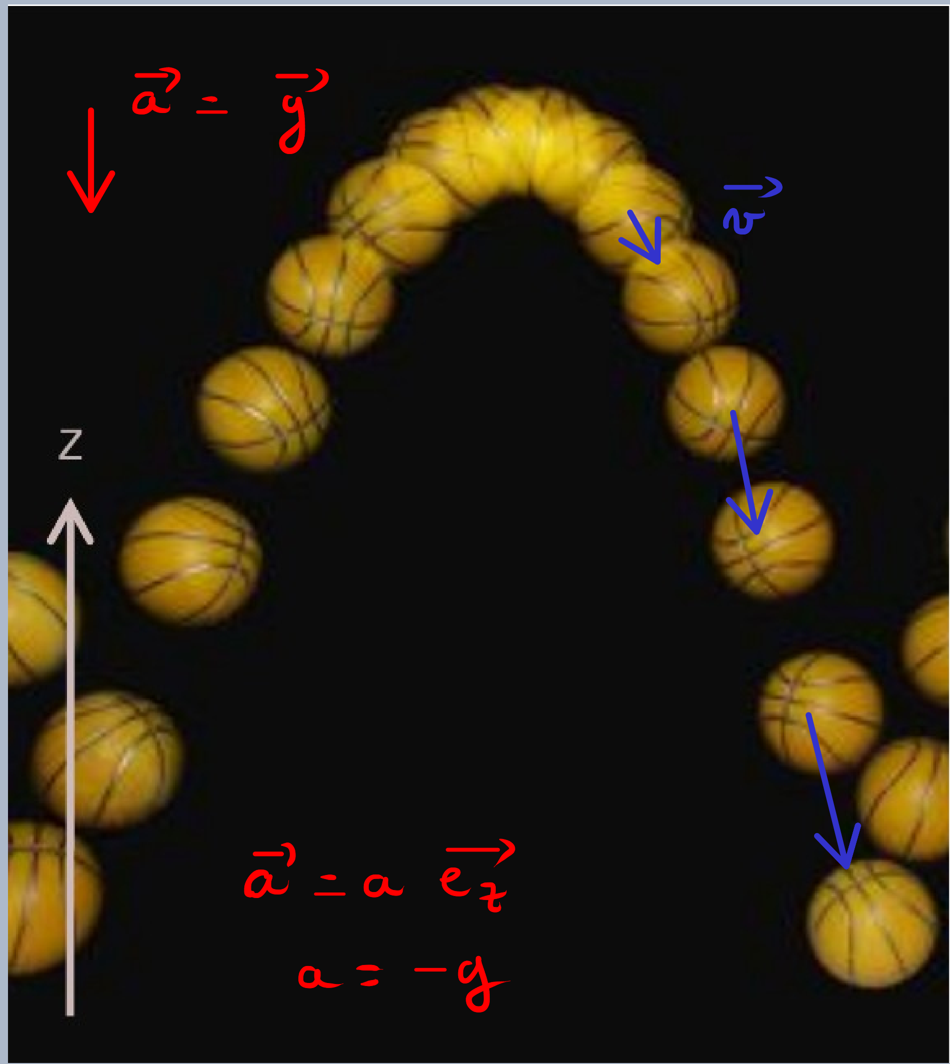
(2) Pendant la descente
(on ne regarde que le mouvement vertical) :

A $v > 0, \quad a \cancel{>} 0$

B $v \cancel{>} 0, \quad a < 0$

C $v < 0, \quad a \cancel{>} 0$

D $v < 0, \quad a < 0$



4.1.2 Espace et temps

Si la balle rebondit, elle monte puis elle descend.

[2]

(3) Au sommet

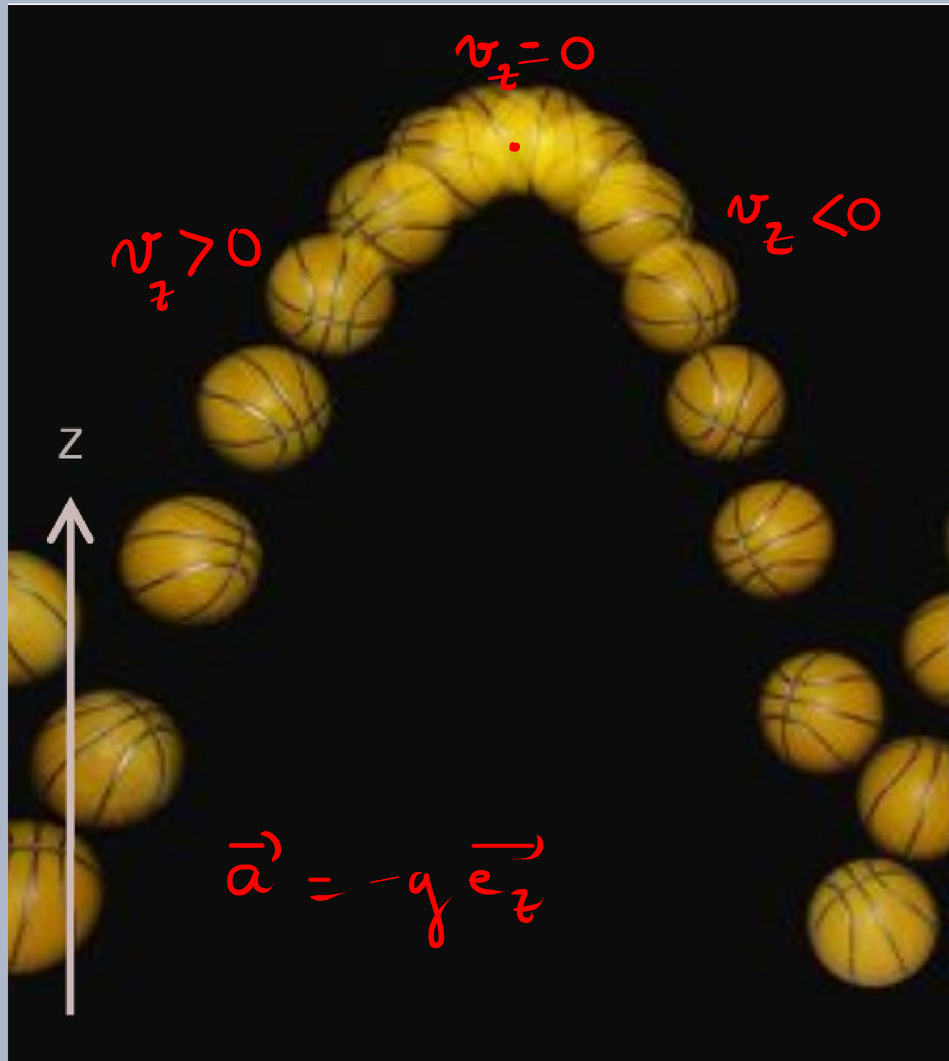
(on ne regarde que le mouvement vertical) :

A $v = 0, \quad a \neq 0$

B $v = 0, \quad a \cancel{=} 0$

C $v \cancel{\neq} 0, \quad a \neq 0$

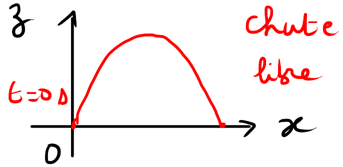
D $v \cancel{\neq} 0, \quad a = 0$



4.1.2 Espace et temps

Mouvement d'un point M

Étudier la trajectoire de M :

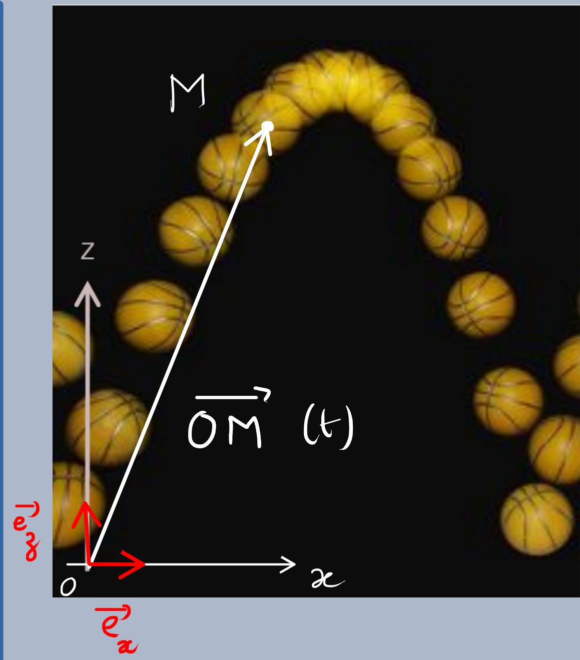


$\overrightarrow{OM}(t)$

trajectoire : $z(x)$ en 2D

$x(t)$
$y(t)$
$z(t)$ équations horaires

- une mesure d'espace définie par une unité de longueur : le mètre,
- une origine d'espace O correspondant à un point fixe dans un référentiel donné,
- trois directions orthogonales fixes repérées par trois axes: Base Orthonormée directe (B.O.D), exemple : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$



- une mesure de temps définie par une unité de durée : la seconde. Nous disposons d'instruments, appellés horloges, permettant de repérer les évènements les uns par rapport aux autres avec une certaine chronologie. L'étalon seconde est aujourd'hui réalisé avec une exactitude relative de 10^{-14} à l'aide d'horloges atomiques matérialisant la période de transition dans l'atome de césium.
- une origine de temps correspondant à un instant initial: t_i

↳ $t = 0\,s$ pas toujours , chute libre : $z\uparrow \ \downarrow\vec{g}$ $a = \frac{dv}{dt} = -g \Rightarrow dv = -g\,dt$

$$\int_{t_i}^{t} dv = -g\int_{t_i}^{t} dt \Rightarrow v(t) - v(t_i) = -g(t-t_i)$$

$$v(t) = -g(t-t_i) + v(t_i)$$

4.1.2 Espace et temps

Repérage d'un point dans l'espace

- mouvement possède un caractère relatif :

Principe de la relativité du mouvement (Galilée)

- Mécanique newtonienne :

Espace physique = Espace euclidien à 3 dimensions

référentiel $\mathcal{R}$ paramétré par un

système de **coordonnées de l'espace** lié à un **observateur**

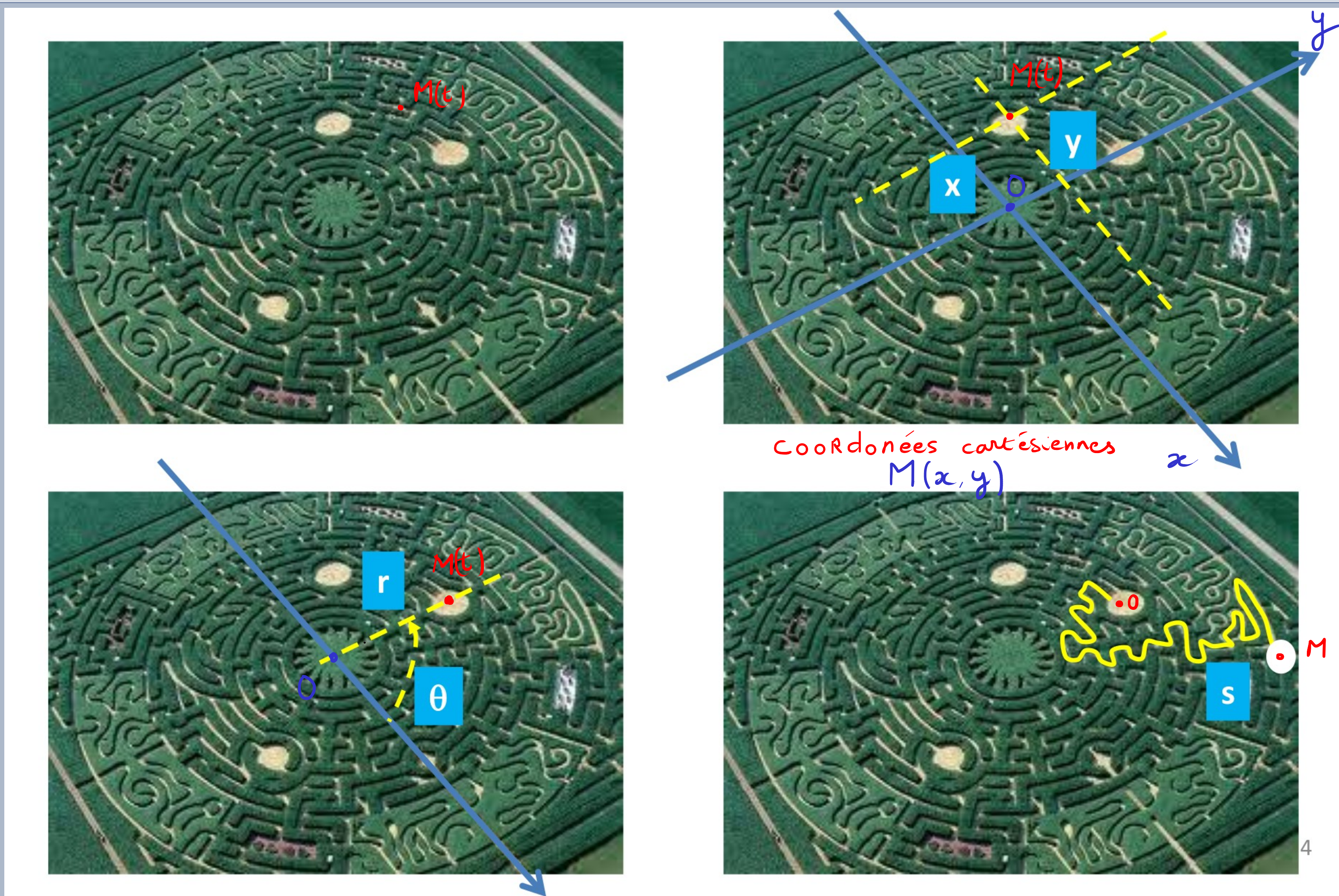
$$= \mathcal{R}(\underbrace{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}}_{\text{repérage en coordonnées cartésiennes}})$$

référentiel

4.1.3 Repérage spatial

Repérage d'un point dans l'espace

2D



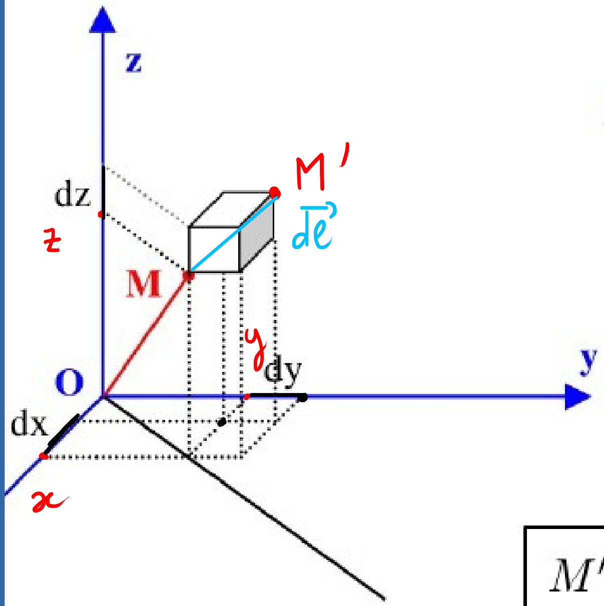
coordonnées polaire
$M(r, \theta)$

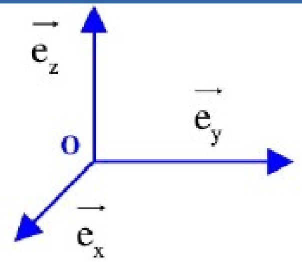
x

coordonnées intrinsèques

4.1.3 Repérage spatial

Coordonnées cartésiennes





$M(x, y, z)$ point de vecteur-position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

↳ $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z} = \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right.$

$M = (x, y, z)$

$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ fixes

<u>Élément différentiel de position</u> $\vec{d\ell} = d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$

$M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ point voisin de position $\vec{r} + d\vec{r}$

déplacement élémentaire $\vec{dl}$: $d\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$

$\dot{\vec{e}}_x = \dot{\vec{e}}_y = \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$

↳ $\boxed{\vec{dl} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z}$

ici, car <u>vecteurs de la base constants</u>

$\vec{v} = \frac{\vec{d\ell}}{dt} = \left| \begin{matrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{matrix} \right.$

4.1.3 Repérage spatial

Coordonnées cartésiennes

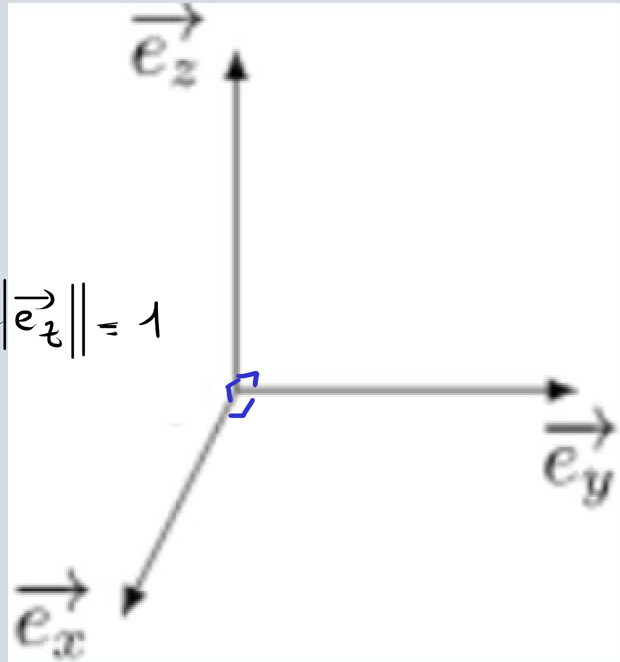
[6]

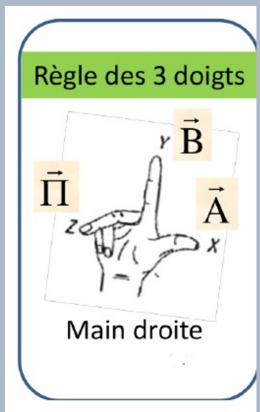
Base orthonormée directe (BOD)

Formée de 3 vecteurs :

- Perpendiculaires
- De norme 1 : $\|\vec{e_x}\| = \|\vec{e_y}\| = \|\vec{e_z}\| = 1$
- Respectant la règle de la main droite

= direct





4.1.3 Repérage spatial

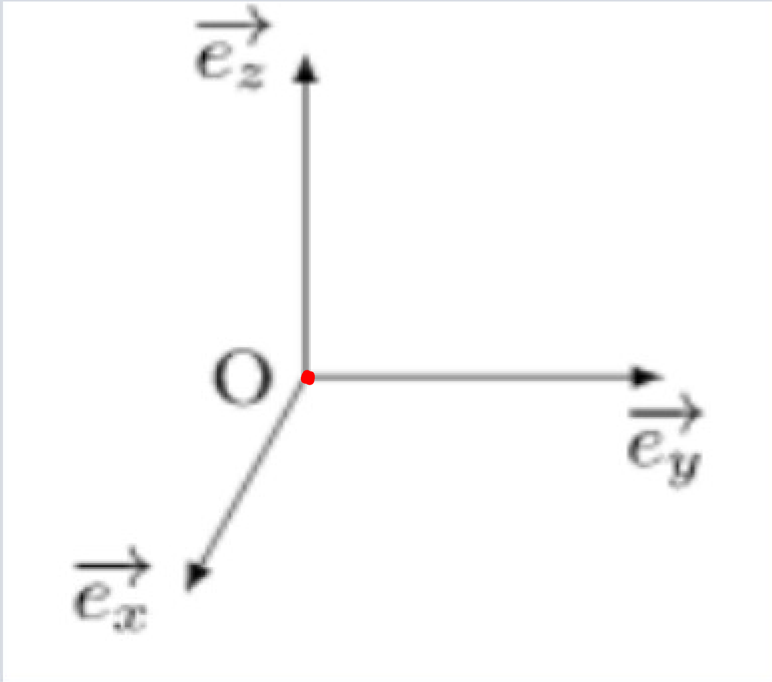
Coordonnées cartésiennes

[6]

Repère

Base Orthonormée Directe

A partir d'une BOD, on obtient un repère en ajoutant le point O, origine du repère. fixe



Repère = (B.O.D) + origine

$\{O ; (\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})\}$

[6]

Référentiel

En ajoutant le temps à un repère on définit un référentiel R. Et on écrira :

↳ par son paramétrage

$$R:(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$$

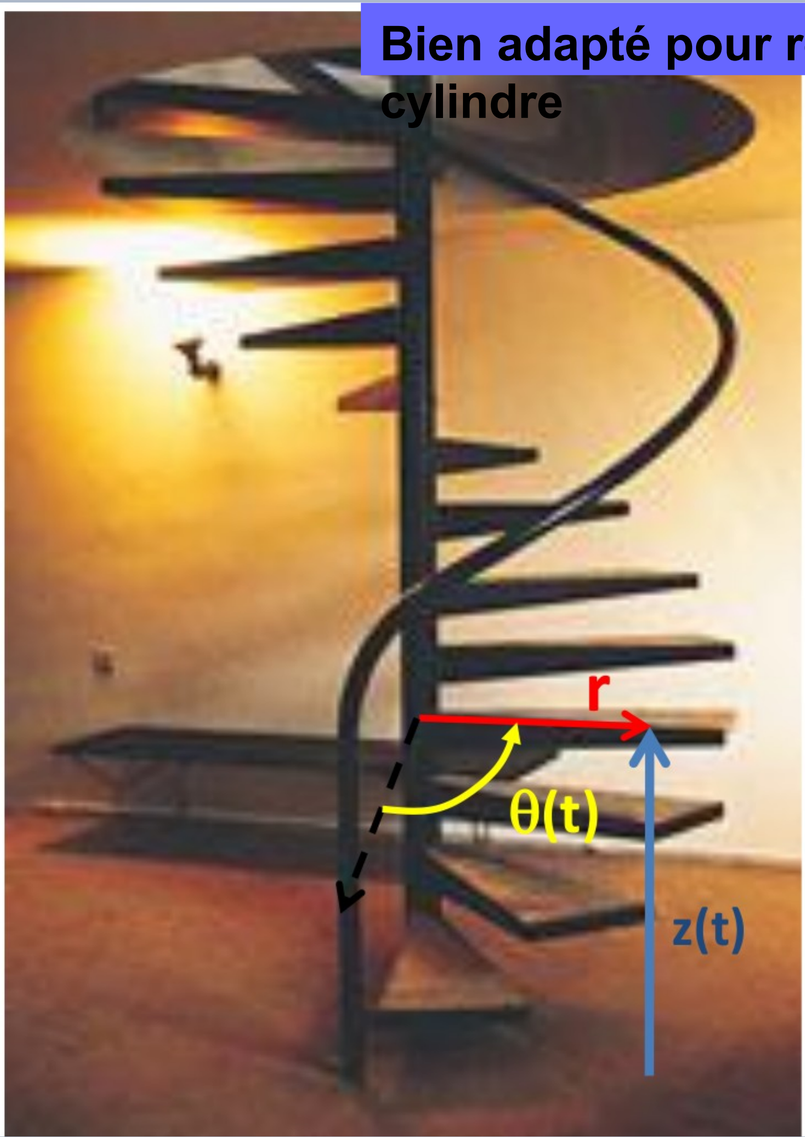
origine

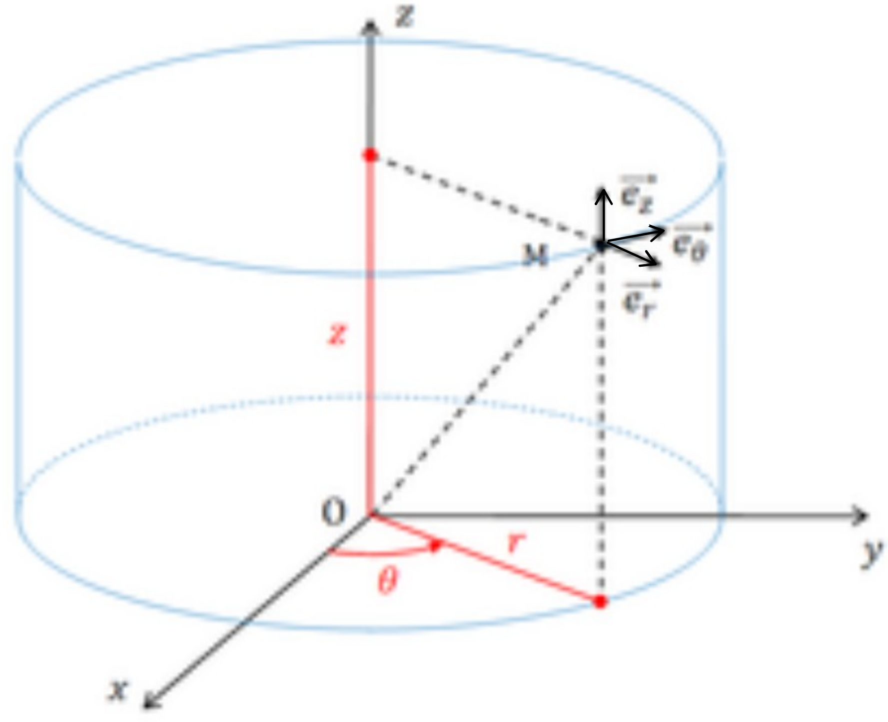
Note : on ne précisera pas le temps dans l'écriture de R.

4.1.3 Repérage spatial

Coordonnées cylindriques

Bien adapté pour repérer un point sur un cylindre



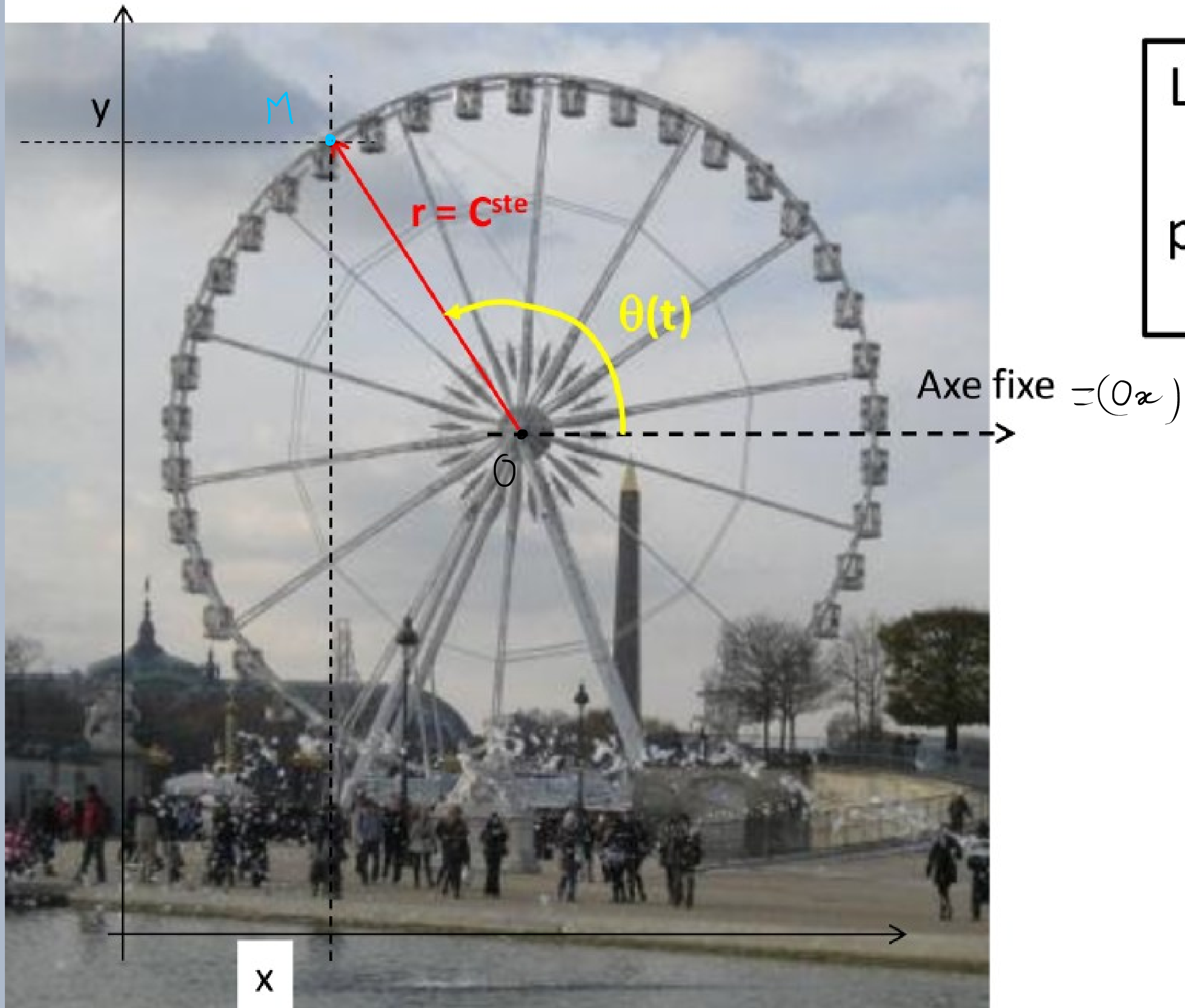


4.1.3 Repérage spatial

Coordonnées cylindriques

Coordonnées polaires

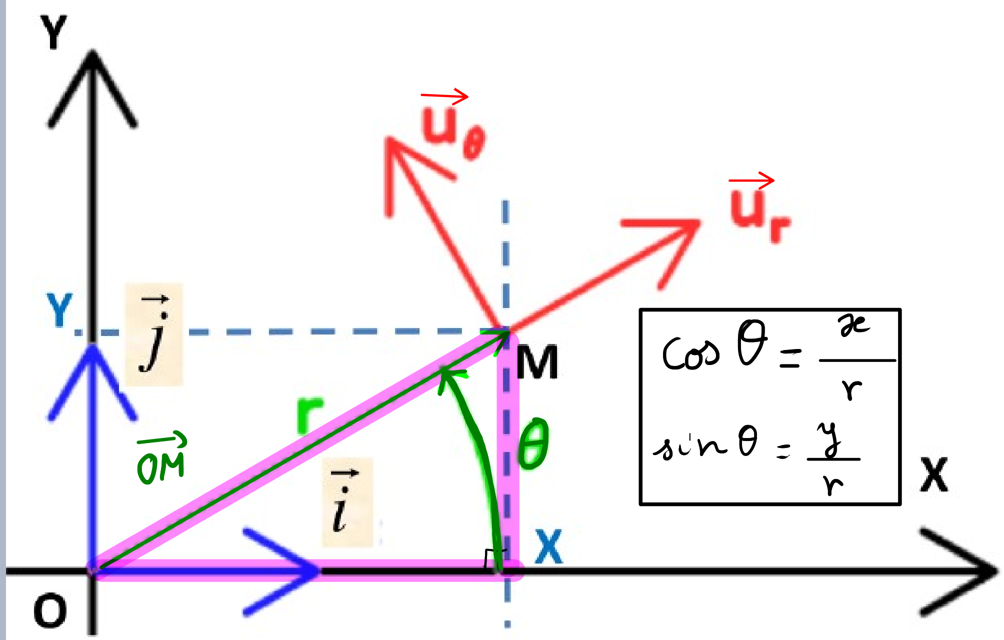
Bien adapté pour repérer un point sur un cercle



Les coordonnées de M sont mieux définies par la donnée de **r** et **θ** *(et non x et y)*

Coordonnées polaires

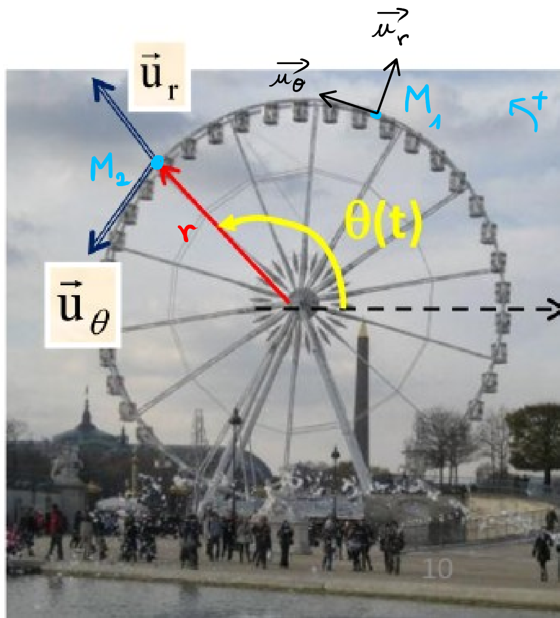
Bien adapté pour repérer un point sur un cercle



$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

Les coordonnées de M sont définies par la donnée de **r** et **θ**

(et non x et y)



(2D) : $\vec{OM} = r\,\vec{u}_r$, θ angle orienté : $\theta = (\widehat{\vec{i},\vec{OM}})$

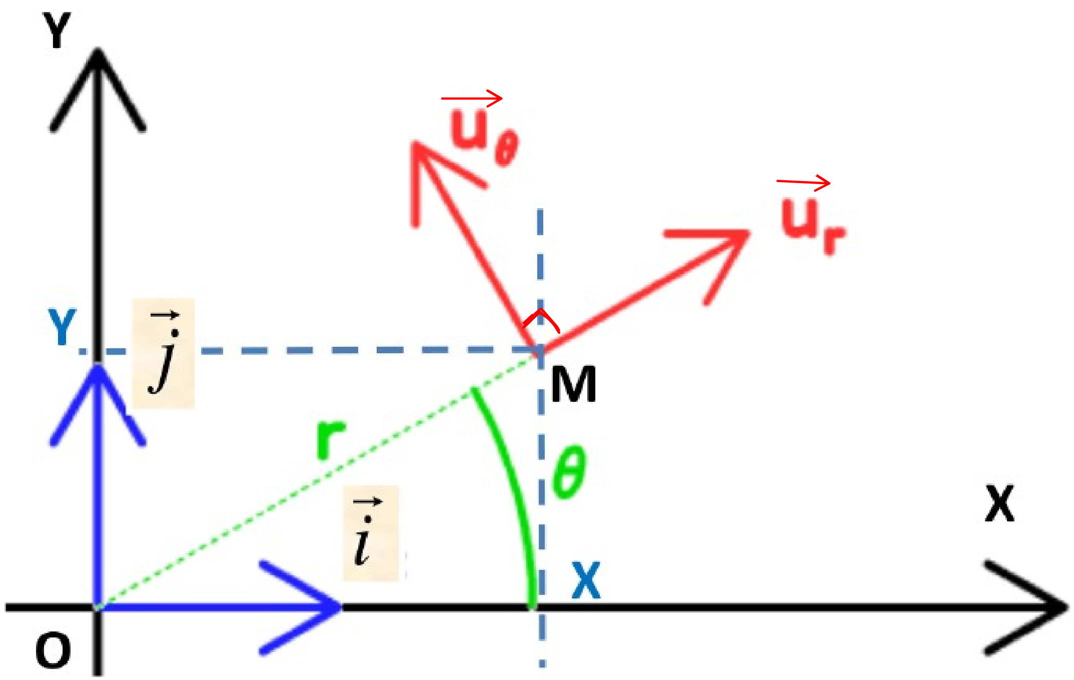
$r^2 = ||\vec{OM}||^2 = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} x = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{i} = r\cos\theta \\ y = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{j} = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

4.1.3 Repérage spatial

Coordonnées cylindriques

Coordonnées polaires



$$\begin{cases} x = \overrightarrow{OM}.\vec{i} = r\cos\theta \\ y = \overrightarrow{OM}.\vec{j} = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

par définition : $\vec{u}_r(t) = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$

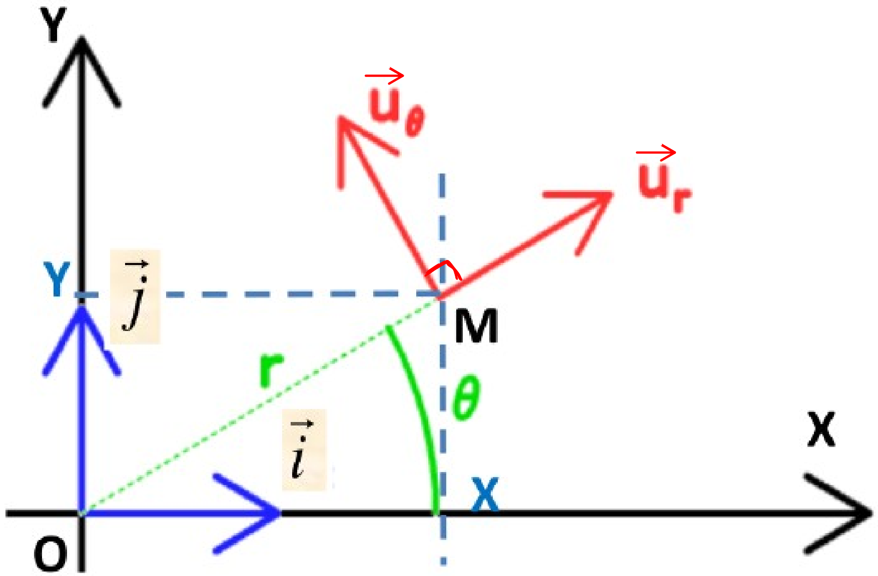
$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)} \Rightarrow \boxed{\vec{u}_r(t) = \cos\theta(t)\vec{i} + \sin\theta(t)\vec{j}}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

4.1.3 Repérage spatial

Coordonnées cylindriques

Coordonnées polaires



$$\begin{cases} x = \overrightarrow{OM}.\vec{i} = r\cos\theta \\ y = \overrightarrow{OM}.\vec{j} = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}}$$

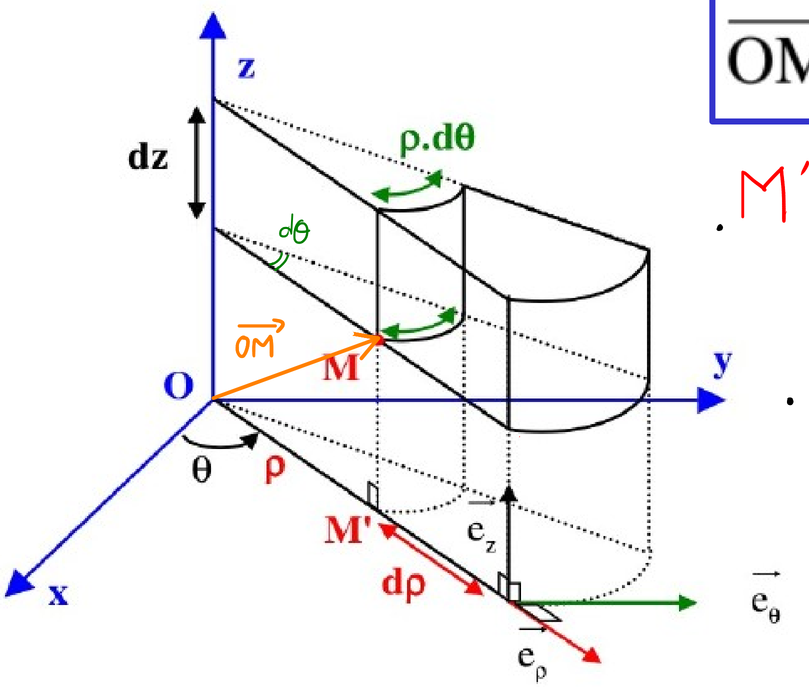
$\vec{u}_\theta$ est un vecteur tel que $\widehat{(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)} = +\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}}$$

4.1.3 Repérage spatial

Coordonnées cylindriques



Élément différentiel de position

B.O.D : $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

fixe

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z}$$

. M' : projeté dans le plan (xOy)

$\rho = \|\overrightarrow{OM'}\|$

. $\dot{\vec{e}}_z = 0$ mais $\vec{e}_\rho(t)$

$\vec{e}_\theta(t)$

$\vec{dl} = \overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\underbrace{d(\vec{e}_\rho)}_{d\theta\,\vec{e}_\theta} + dz\,\vec{e}_z$

car $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta$. $\vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

. $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = +\vec{e}_\theta$

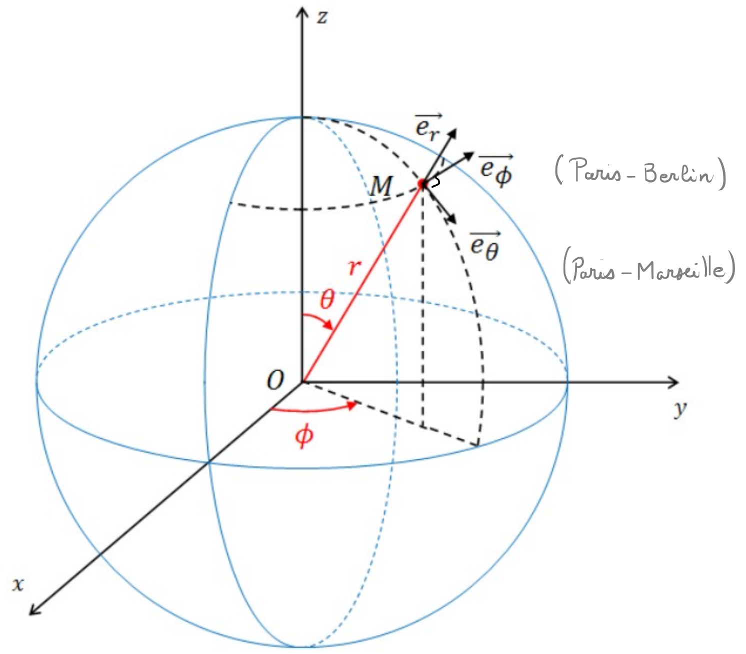
$$\boxed{\vec{dl} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z}$$

$\longrightarrow \vec{v} = \dfrac{\vec{dl}}{dt} = \left| \begin{array}{l} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{array} \right.$

4.1.3 Repérage spatial

Coordonnées sphériques

B.O.D : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi})$



- $r \in [0 ; \infty[$
- $\theta \in [0, \pi]$; $\varphi \in [0, 2\pi]$

Bien adapté pour repérer un point sur une sphère

Coordonnées sphériques

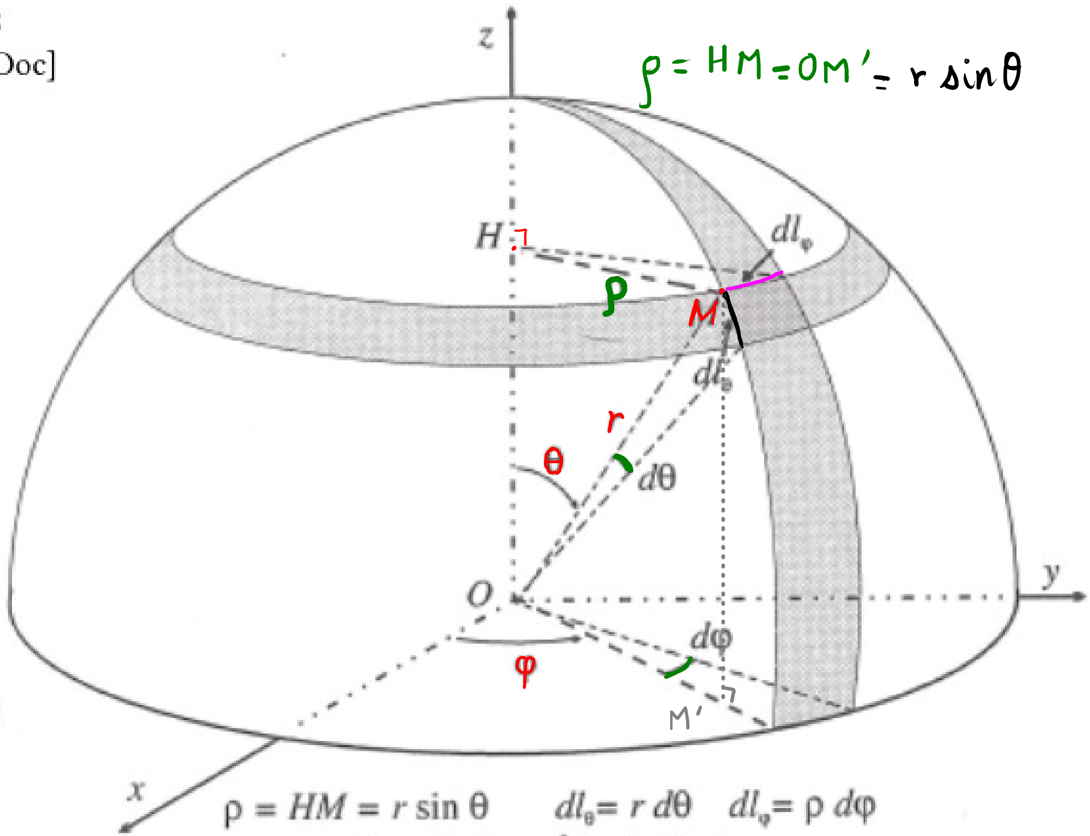
Figure : Élément d'aire en coordonnées sphériques
[*Électromagnétisme 1 – 1ère année* , H. Gié et J.P. Sarmant, Tec&Doc]

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r}$$

$\vec{dl} = dr\,\vec{e}_r + dl_\theta\,\vec{e}_\theta + dl_\varphi\,\vec{e}_\varphi$

$dl_\theta = r\,d\theta$

$dl_\varphi = \rho\,d\varphi = r\sin\theta\,d\varphi$



$\rho = HM = r\sin\theta \quad dl_\theta = r\,d\theta \quad dl_\varphi = \rho\,d\varphi$

$dS = dl_\theta\,dl_\varphi = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

Élément différentiel de position

$\rho = r\sin\theta$

$$\boxed{\vec{dl} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi}$$

SITÉ

4.1.3 Repérage spatial

Coordonnées intrinsèques

Longueur du chemin entre Ω et M :

s = abscisse curviligne= $\widehat{\Omega M}$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \ ?}$$

$\vec{u}_t$ Vecteur tangent à la trajectoire

$\vec{u}_n$ Vecteur normal à la trajectoire

$$(\vec{u}_t, \vec{u}_n) = +\frac{\pi}{2}$$

4.1.3 Repérage spatial

Résumé

Dans un plan : (2D)

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ cartésiennes

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ polaires

$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

Dans l'espace :

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ cartésiennes $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ fixes ⚠

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r^{\,\text{plan}} + z\,\vec{k}$ cylindriques

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r^{\,\text{espace}}$ sphériques

⚠ ***: vecteurs non identiques*** ($\vec{u}_r = \vec{e}_\rho$ cf. avant)

On peut aussi repérer la position d'un point par son abscisse curviligne, s (cf compteur kilométrique de voiture).

4.1.4 Produit scalaire et vectoriel

En Mécanique, on modélise les mouvements et leurs causes, les ***forces***, par des ***vecteurs***.

Afin de résoudre les problèmes de Mécanique, d'Électromagnétisme etc… , on a besoin de *projeter les vecteurs* sur des directions particulières en utilisant les produits scalaires.

$(\vec{A} \cdot \vec{B})$: scalaire

$(\vec{A} \wedge \vec{B})$: vecteur

En présence de rotations, on utilise également le produit vectoriel, ce qui sera un cas rencontré souvent en Électromagnétisme 1 et 2 lors qu'on s'intéressera au champ magnétique.

4.2.1 Produit scalaire et vectoriel

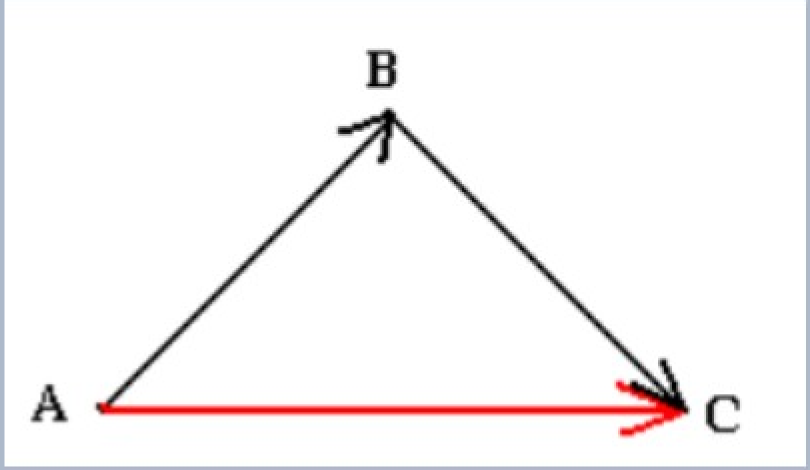
Calcul vectoriel - Relation de Chasles

[6]

La relation de Chasles permet de calculer la somme de deux vecteurs dans un espace affine.

Ainsi pour tous points A, B et C d'un espace affine, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$



[6]

Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v}$ est un scalaire qui vaut :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overbrace{\|\vec{u}\|}^{\text{norme de } \vec{u}} . \|\vec{v}\| . \cos\underbrace{(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}_{\text{angle orienté entre les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v}}$$

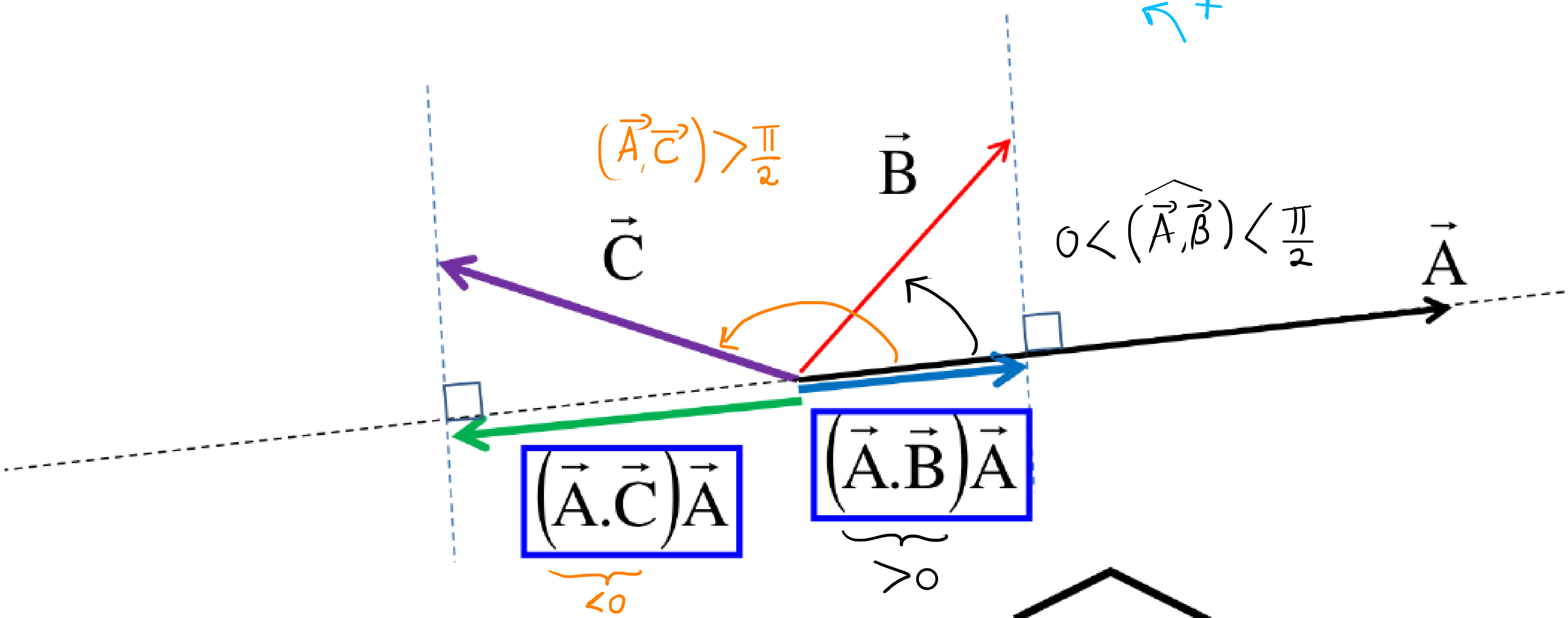
Propriétés :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ commutatif
- $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$
- $\vec{u}.\vec{u} = \|u\|^2$ donc norme $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}}$

4.1.4 Produit scalaire et vectoriel

Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit **scalaire** de deux vecteurs mesure l'intensité de la projection d'un vecteur sur l'autre. C'est un **nombre** positif ou négatif



$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\| \cos\widehat{\left(\vec{A},\vec{B}\right)}}$$

⚠ angles orientés

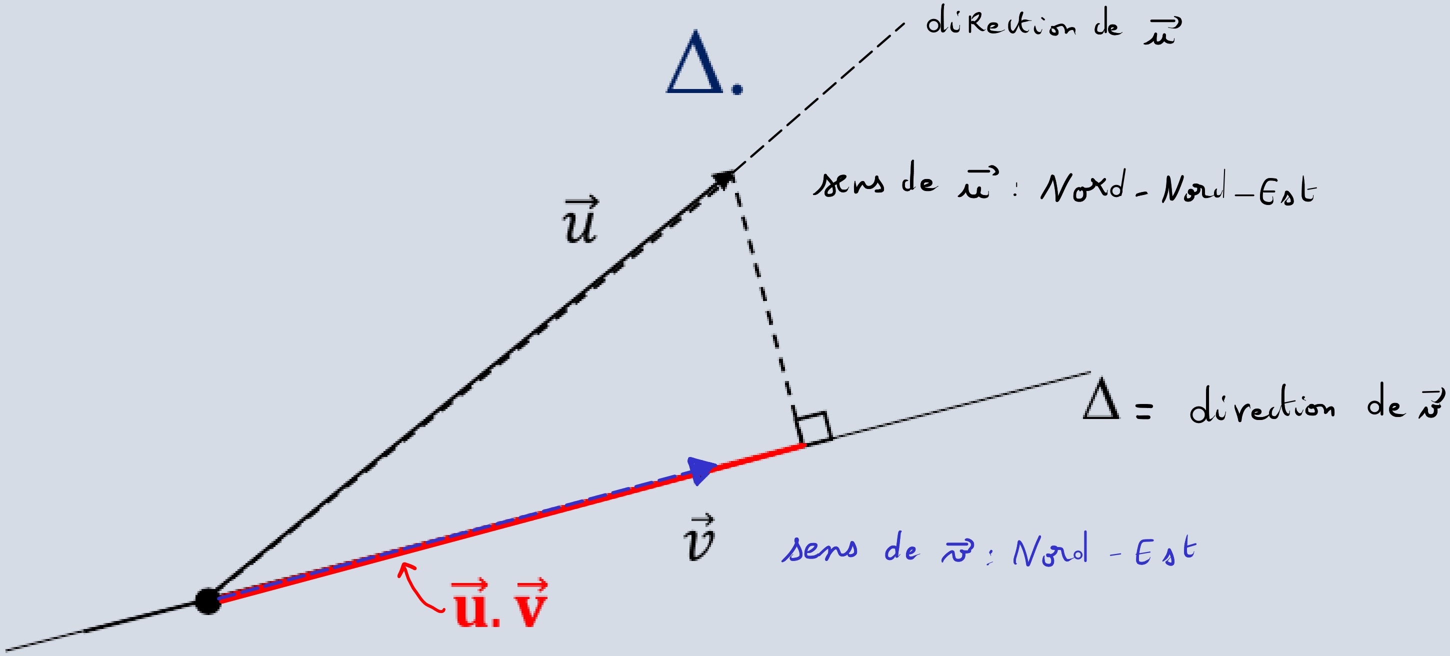
TÉ

4.2.1 Produit scalaire et vectoriel

Calcul vectoriel - Le produit scalaire

[6]

Projection d'un vecteur dans la direction Δ.



[6]

Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur dont :

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$
- La direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est $\perp$ à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- Sens : donné par la règle de la main droite

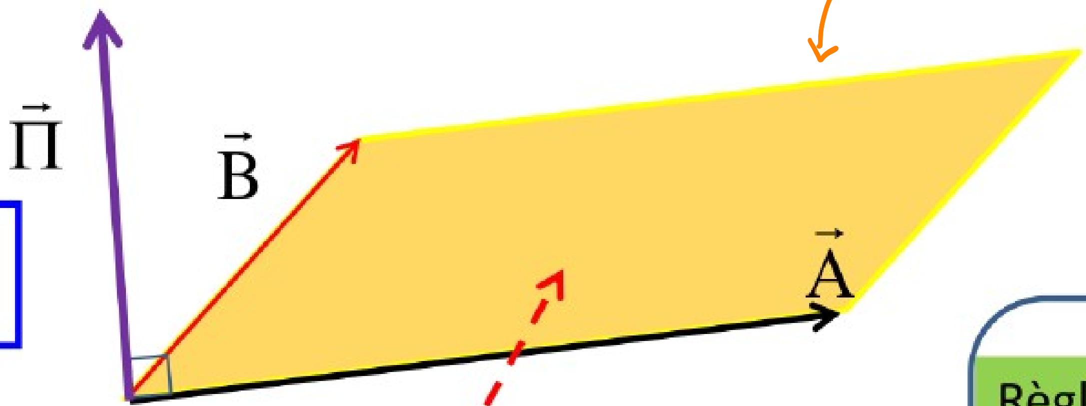
Propriétés :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ colinéaire à } \vec{v}}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

4.1.4 Produit scalaire et vectoriel

Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit **vectoriel** de deux vecteurs est un **vecteur**. Il mesure la surface du parallélogramme basé sur les deux vecteurs.



$$\boxed{\vec{\Pi} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}}$$

Notation anglo-saxonne

surface du parallélogramme

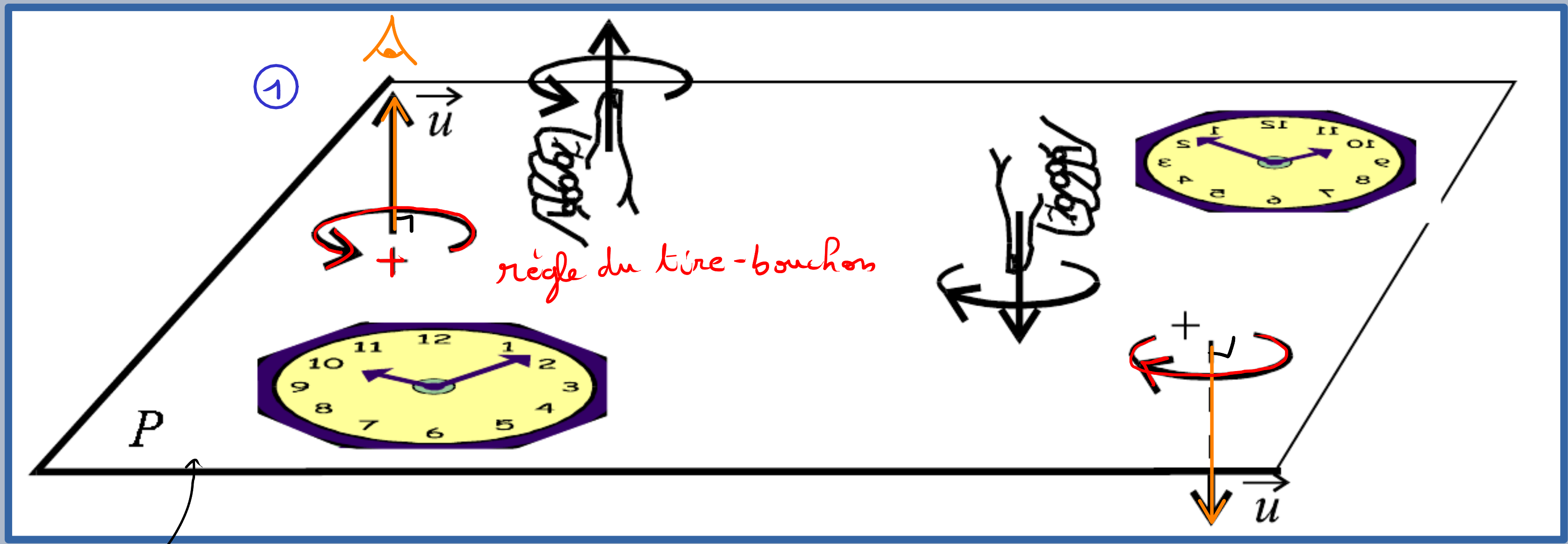
$$\boxed{\left\|\vec{\Pi}\right\| = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\| \left|\sin\widehat{\left(\vec{A},\vec{B}\right)}\right|}$$

Règle des 3 doigts

Main droite

4.1.4 Produit scalaire et vectoriel

Produit vectoriel : orientation...



2

Plan P et $\vec{u}$ perpendiculaire au plan

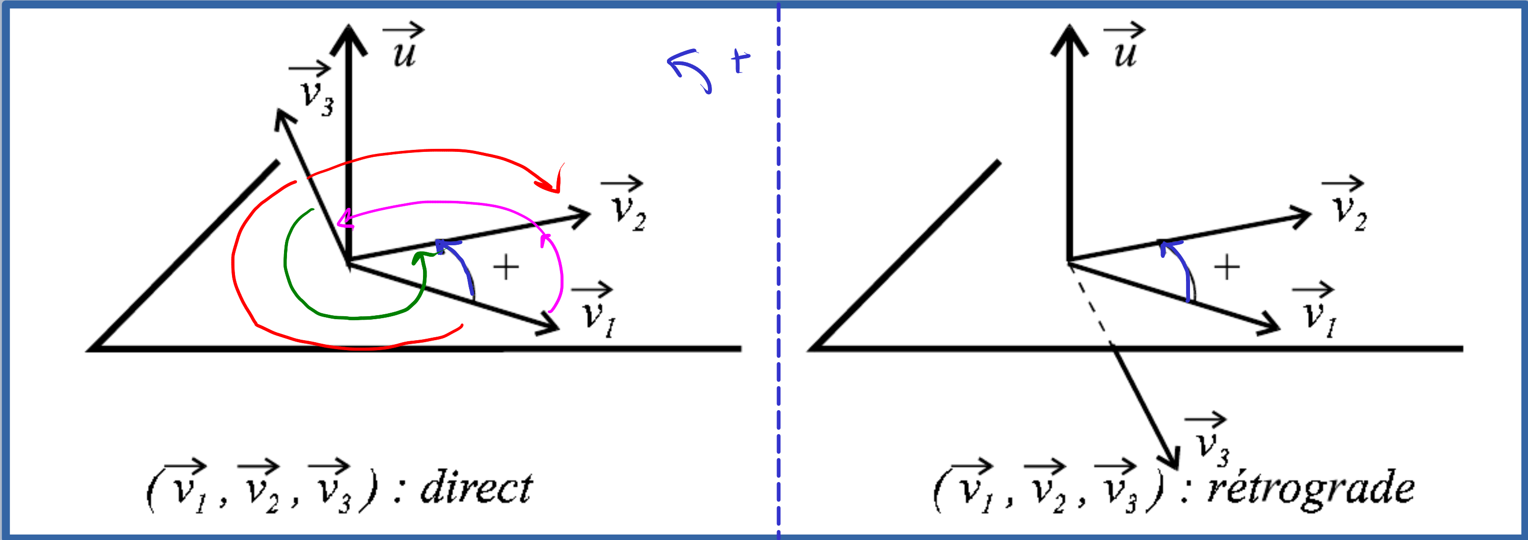
↳ $\vec{u}$: sens positif (règle du tire-bouchon)

⟶ 2 orientations possibles d'un plan : 1 ou 2

$\vec{u}$: ↑ ou ↓

4.1.4 Produit scalaire et vectoriel

Produit vectoriel : orientation...



Base Orthonormée Directe (B.O.D)

$\downarrow$

⚠ règle de la main droite

trièdre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ direct

" $(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ "

" $(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2)$ rétrograde

exemple : B.O.D $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = +\vec{u}_3$ $\qquad$ $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_3 = -\vec{u}_2$

$\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = +\vec{u}_1$

4.1.4 Produit scalaire et vectoriel

Propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel

Propriétés	Produit scalaire	Produit vectoriel
Notation	$\vec{A}.\vec{B}$	$\vec{\Pi} = \vec{A} \wedge \vec{B}$
Nature	Scalaire (nombre)	Vecteur
Valeur	$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = \lVert\vec{A}\rVert \lVert\vec{B}\rVert \cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)}$ >0 ou <0	$\boxed{\lVert\vec{\Pi}\rVert = \lVert\vec{A}\rVert \lVert\vec{B}\rVert \left\lvert\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)\right\rvert}$
Commutation	$\vec{B}.\vec{A} = +\vec{A}.\vec{B}$	$\vec{B} \wedge \vec{A} = -\vec{A} \wedge \vec{B}$
Associativité	$\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$	$\vec{A} \wedge \left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$
Produit avec lui-même	$\vec{A}.\vec{A} = \lVert\vec{A}\rVert^2$	$\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$

4.1.4 Produit scalaire et vectoriel

Propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel

Propriétés	Produit scalaire	Produit vectoriel
Notation	$\vec{A}.\vec{B}$	$\vec{\Pi} = \vec{A} \wedge \vec{B}$
Produit nul (les deux vecteurs sont non nuls)	$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = 0 \text{ ssi } \vec{A} \perp \vec{B}}$	$\boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \text{ ssi } \vec{A} // \vec{B}}$
'Valeur' maximale	si $\vec{A} // \vec{B}$, $\vec{A}.\vec{B} = \lVert\vec{A}\rVert \, \lVert\vec{B}\rVert$	si $\vec{A} \perp \vec{B}$, $\lVert\vec{A} \wedge \vec{B}\rVert = \lVert\vec{A}\rVert \, \lVert\vec{B}\rVert$
Valeur en fonction des coordonnées $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$	$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ $\left\lvert \begin{array}{ccc} A_x & — & B_x \\ A_y & \cdot & B_y \\ A_z & — & B_z \end{array} \right. = A_x B_x + \ldots$	$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$

4.2.1 Produit scalaire et vectoriel

Calcul de produits vectoriels utiles

[6]

Dans la BOD cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$

$\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_x}$

$\longrightarrow$ (+)

$\longleftarrow$ (-)

$\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} = +\overrightarrow{e_z}$

$\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_z} = -\overrightarrow{e_y}$

Dans la BOD cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$

$\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_r}$

$\longrightarrow$ (+)

$\longleftarrow$ (-)

$\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = +\overrightarrow{e_z}$

$\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_z} = -\overrightarrow{e_\theta}$

Idem avec la BOD sphérique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

4.2.2 Dérivée

Dérivée d'un vecteur

- Le système de coordonnées cartésiennes est formé d'une base qui reste immobile où du moins dont les vecteurs formant cette base ne varie pas dans le temps. Ainsi :

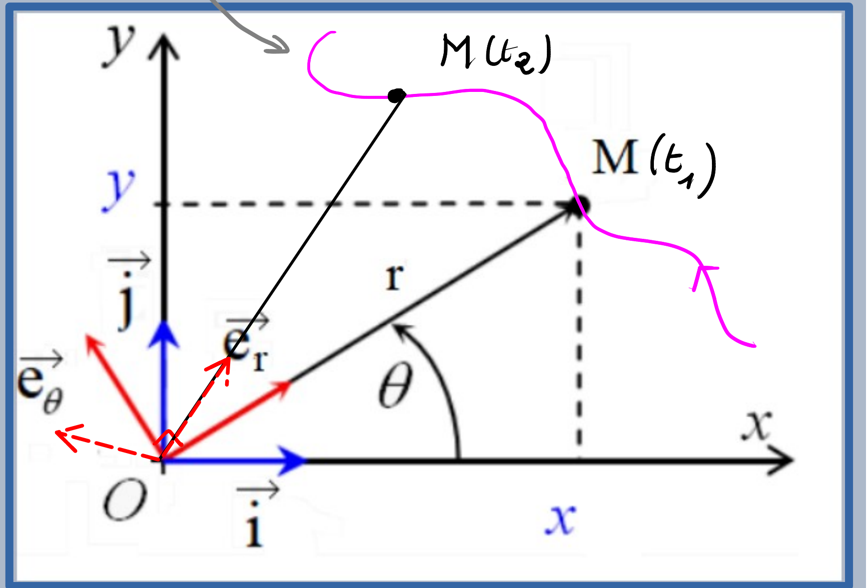
$$\boxed{\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}}$$

- Le système de coordonnées cylindriques est formé d'une base qui est locale. Elle suit le point M au cours du temps. Ainsi les vecteurs de la base variant dans le temps. Ainsi :

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{dt} \neq \vec{0} \text{ et } \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \neq \vec{0}}$$

[6]

trajectoire



$\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ varie dans le temps

avec M(t)

$\vec{e_z}$ fixe

4.2.2 Dérivée

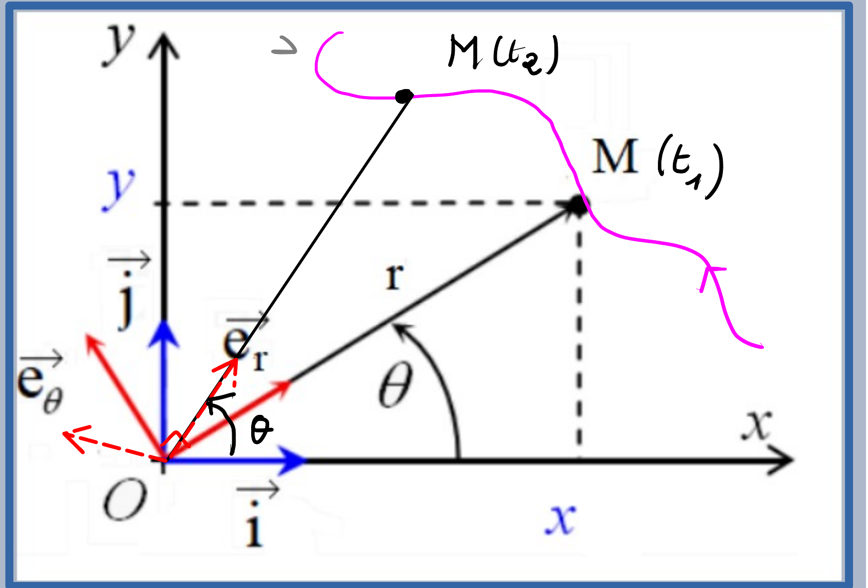
Dérivée d'un vecteur

[6]

On se place dans le cas où M est animé d'un mouvement de rotation (trajectoire circulaire dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Alors, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ tournent autour de l'axe $(O, \vec{e}_z)$, axe hors plan de la feuille. Ainsi :

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \neq \vec{0} \text{ et } \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \neq \vec{0}}$$



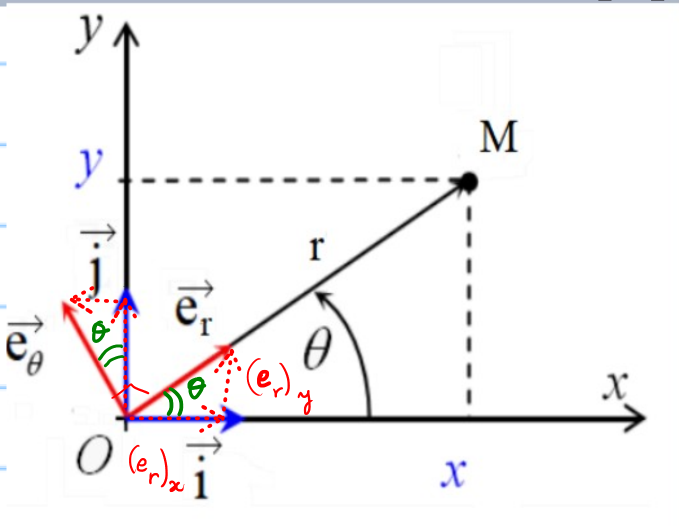
Question : Comment calculer $\dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta}$ et $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$???

4.2.2 Dérivée

Dérivée d'un vecteur

Calculs de $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$ [6]

B.O.D $\|\vec{e}_r\| = \|\vec{e}_\theta\| = 1$, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$



• $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ en coordonnées cartésiennes :

↳ $\vec{e}_r = (e_r)_x \, \vec{i} + (e_r)_y \, \vec{j}$

$$\cos\theta = \frac{(e_r)_x}{\|\vec{e}_r\|} = \frac{(e_r)_x}{1} \Rightarrow (e_r)_x = \cos\theta = (\vec{e}_r \cdot \vec{i})$$

$$\sin\theta = \frac{(e_r)_y}{\|\vec{e}_r\|} = \frac{(e_r)_y}{1} \Rightarrow (e_r)_y = \sin\theta = (\vec{e}_r \cdot \vec{j})$$

donc $\boxed{\vec{e}_r = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j}}$

$\theta \to \theta + \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j}}$$

Dérivée d'un vecteur

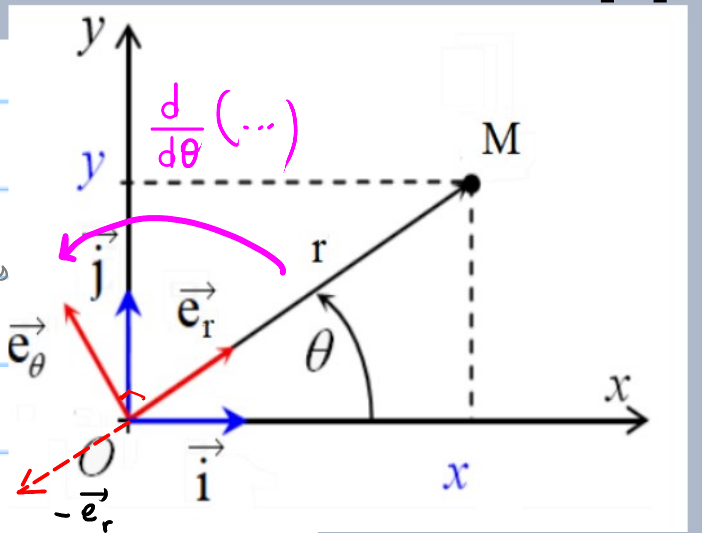
Calculs de $\dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta}$ **et** $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$ [6]

- $\vec{e}_r = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j} \longrightarrow \dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \underbrace{\dfrac{d(\cos\theta)}{d\theta}}_{-\sin\theta}\vec{i} + \underbrace{\dfrac{d(\sin\theta)}{d\theta}}_{\cos\theta}\vec{j} + \underbrace{\vec{0}}_{\vec{i},\ \vec{j}\ \text{fixes}}$

$$\boxed{\dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta}} = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j} = \underline{\vec{e}_\theta}$$

- $\boxed{\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}} = -\cos\theta\ \vec{i} - \sin\theta\ \vec{j} = \underline{-\vec{e}_r}$

« Dériver par rapport à θ » = « Tourner de $+\frac{\pi}{2}$ »



Question : Comment calculer $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}$ et $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}$???

Dérivée d'un vecteur

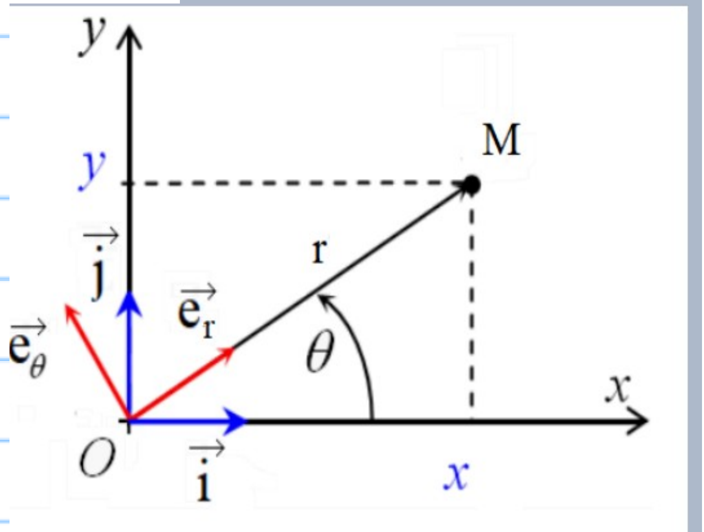
Calculs de $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ **et** $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ [6]

- $\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \vec{e}_\theta \ \dot{\theta}$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{e}}_r = +\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta}$

- $\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right) = \left(\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -\vec{e}_r \ \dot{\theta}$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\ \vec{e}_r}$



« Dériver par rapport à t » = « Tourner de $+\frac{\pi}{2}$ et $\times\, \dot{\theta}$ »

remarque : $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\right) = \ddot{\theta}$

Scalaire ou vecteurs ?

Qu’est-ce qu’un déplacement ?

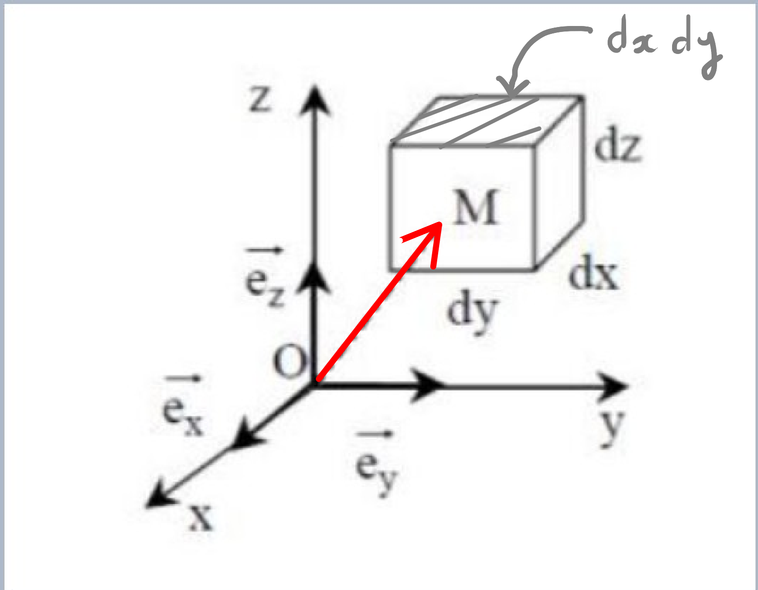
Introduction aux vecteurs et aux scalaires

https://fr.khanacademy.org/math/be-4eme-secondaire2/x213a6fc6f6c9e122:geometrie-vectorielle/x213a6fc6f6c9e122:les-bases-vecteurs/v/introduction-to-vectors-and-scalars

[7]

4.3 Les grandeurs cinématiques

Système de coordonnées cartésiennes



$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

Coordonnées Cartésiennes

- (x, y, z)
- Vecteur position :

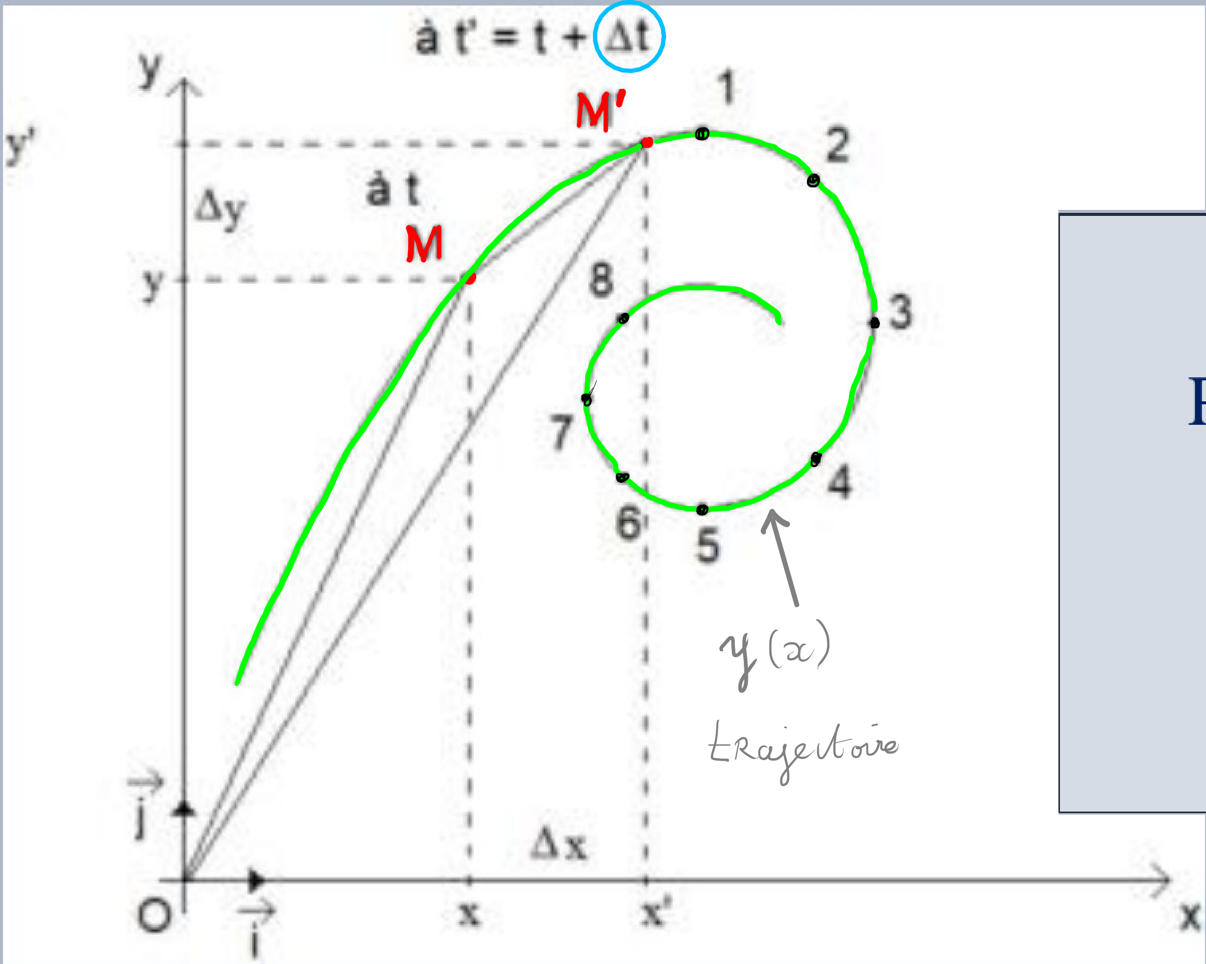
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}}$$

- déplacement élémentaire :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx.\vec{e_x} + dy.\vec{e_y} + dz.\vec{e_z}}$$

[6]

Système de coordonnées cartésiennes



(2 D)

[6]

Coordonnées Cartésiennes

Problème dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

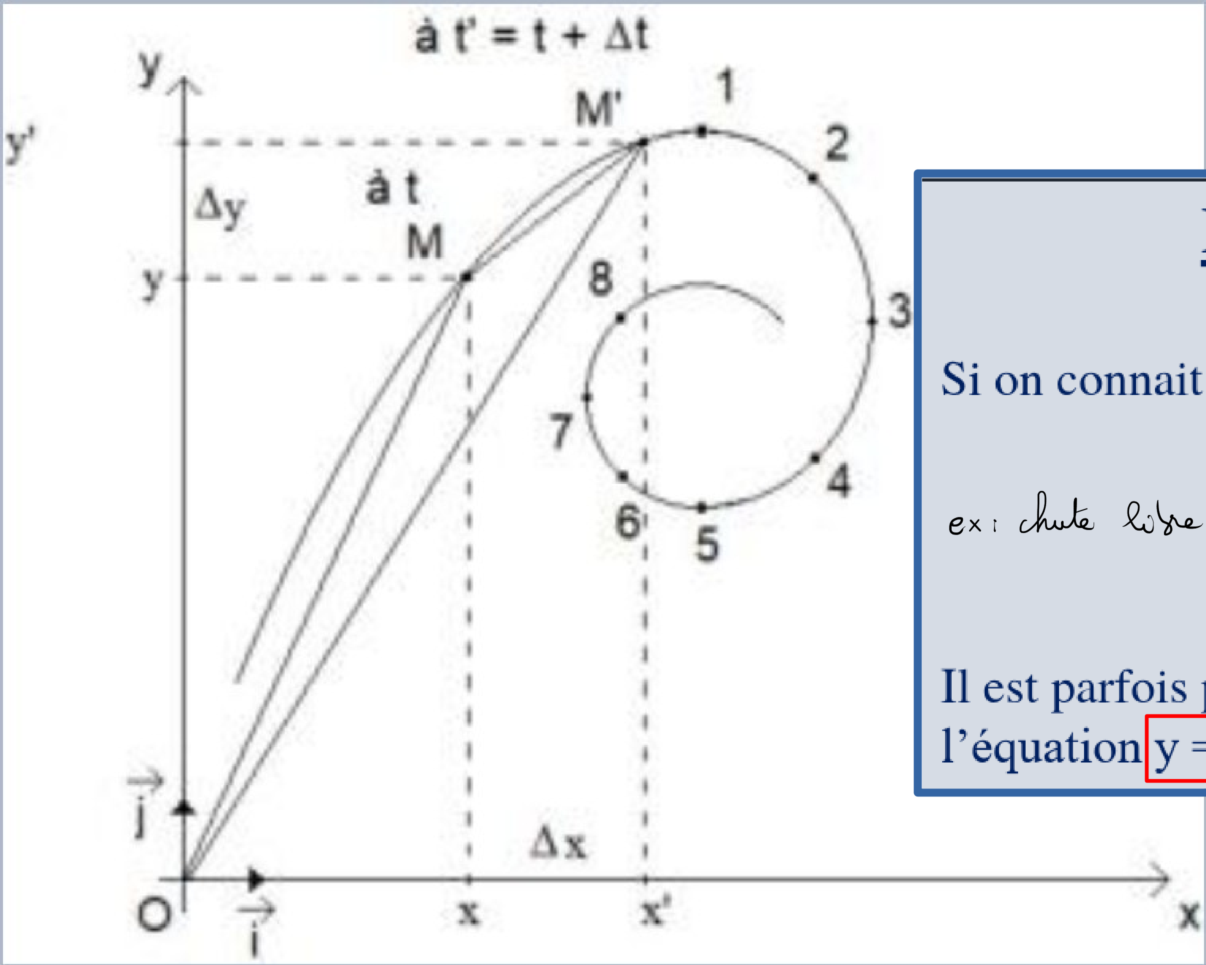
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$$

Vitesse instantanée :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y}$$

Système de coordonnées cartésiennes

[6]



Equation de la trajectoire :

Si on connait les équations paramétrées :

ex : chute libre

$$\begin{cases} y = f_1(t) \\ x = f_2(t) \end{cases}$$

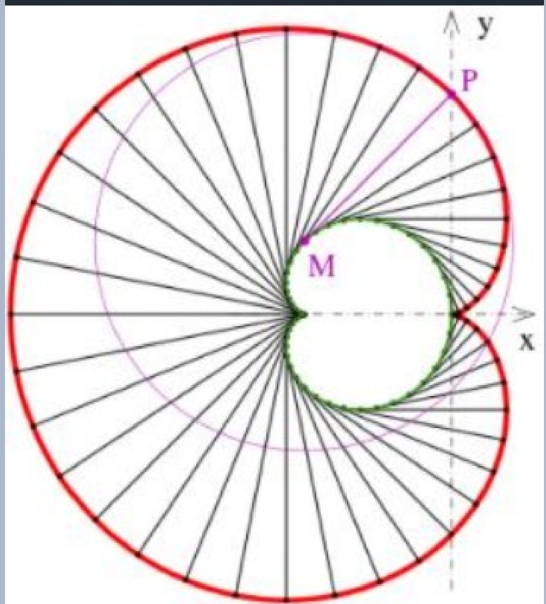
équations horaires

Il est parfois possible de substituer le paramètre t pour trouver l'équation $\boxed{y = f(x)}$ et trouver l'allure de la trajectoire ...

4.3 Les grandeurs cinématiques

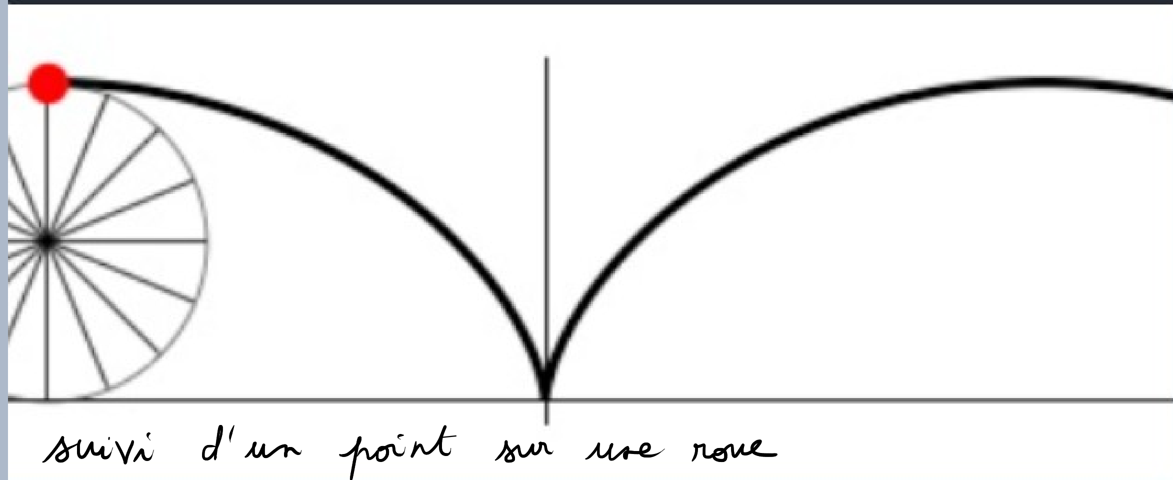
Système de coordonnées cartésiennes - Trajectoires

cardioïde



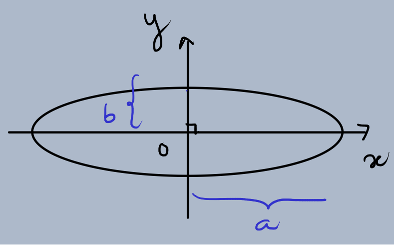
cycloïde

[6]



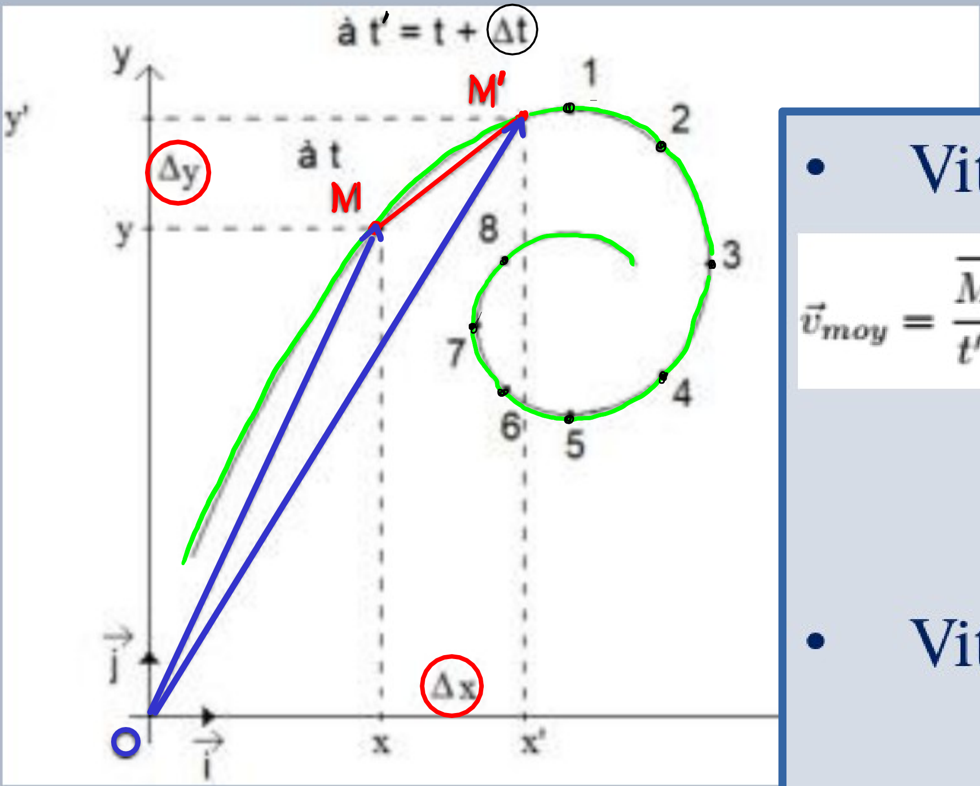
Equations de trajectoires connues

$Y = a.x$	linéaire } trajectoire
$Y = a.x+b$	affine } rectiligne
$Y = 1/x$	hyperbole
$Y = ax^2+bx+c$	parabole (ex : chute libre)
$(y-y_c)^2 + (x-x_c)^2 = R^2$	cercle de rayon R et de centre (x_c, y_c)
$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$	ellipse de demi-grand axes a et b.



4.3 Les grandeurs cinématiques

Système de coordonnées cartésiennes - **vitesse**



- Vitesse moyenne: $\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{OM}}{\Delta t}$

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\vec{e}_x + \Delta y\,\vec{e}_y}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{e}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{e}_y = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$$

- Vitesse instantanée:

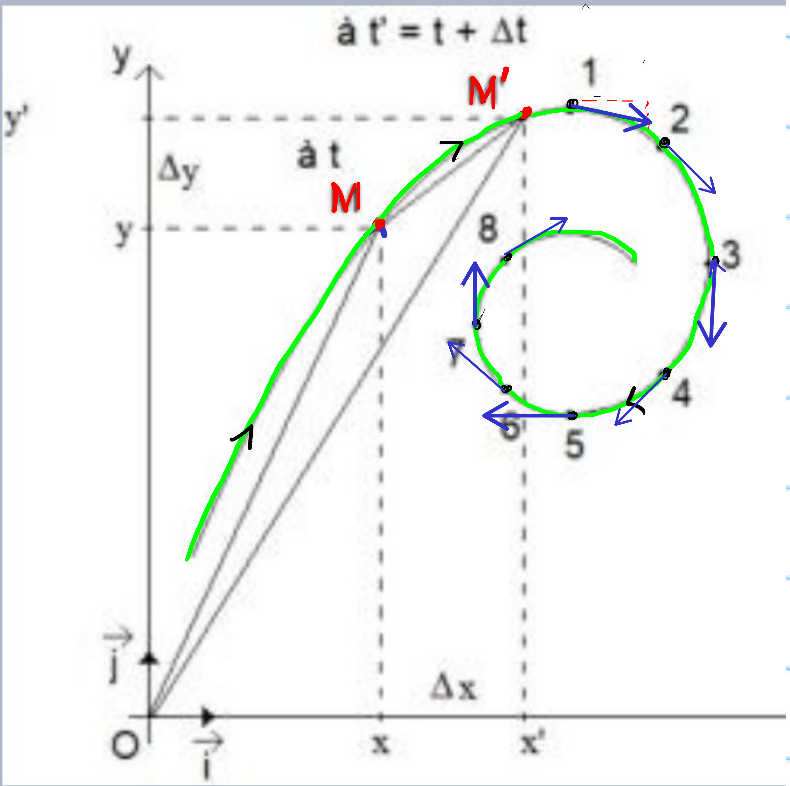
$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \qquad \| \vec{v} \| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

4.3 Les grandeurs cinématiques

Système de coordonnées cartésiennes - **vitesse**

[6]



Préciser les signes de v_x et de v_y aux points: 1,2,3,4,5,6,7,8.

1. $v_x > 0$ $\quad v_y \lesssim 0$
2. $v_x > 0$ $\quad v_y < 0$
3. $v_x = 0$ $\quad v_y < 0$
4. $v_x < 0$ $\quad v_y < 0$
5. $v_x < 0$ $\quad v_y = 0$
6. $v_x < 0$ $\quad v_y > 0$
7. $v_x = 0$ $\quad v_y > 0$

$\vec{v}$ tangent à la trajectoire

4.3 Les grandeurs cinématiques

Nature du mouvement

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt}$ [6]

- Si la valeur de la vitesse augmente alors le mouvement est accéléré soit v = f(t) est une fonction croissante. $a > 0$

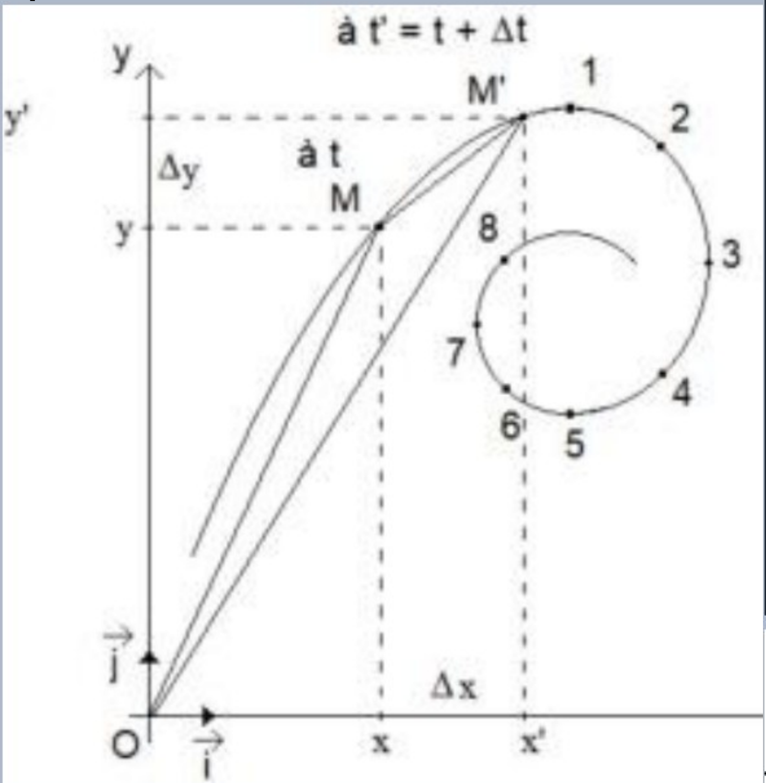
- Si la valeur de la vitesse diminue alors le mouvement est freiné (ou retardé) car v = f(t) est une fonction décroissante. $a < 0$

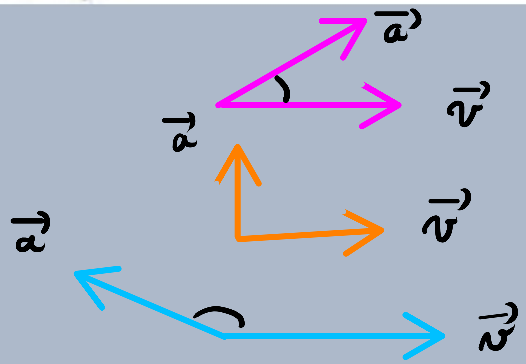
- Si la valeur de la vitesse ne change pas alors le mouvement est uniforme car v = f(t) est une fonction constante. $a = 0$

4.3 Les grandeurs cinématiques

Système de coordonnées cartésiennes - **accélération**

[6]





$$\boxed{\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

$$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

$$\| \vec{a} \| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Nature du mouvement et angle entre $\vec{a}$ et $\vec{v}$

- Mouvement accéléré : la valeur de v augmente si $0 \leq (\vec{a}\,;\vec{v}) \leq \frac{\pi}{2}$
- Mouvement uniforme : la valeur de v est constante si $(\vec{a}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$
- Mouvement freiné : $\frac{\pi}{2} \leq (\vec{a}\,;\vec{v}) \leq \pi$

4.3 Les grandeurs cinématiques

Mouvements usuels

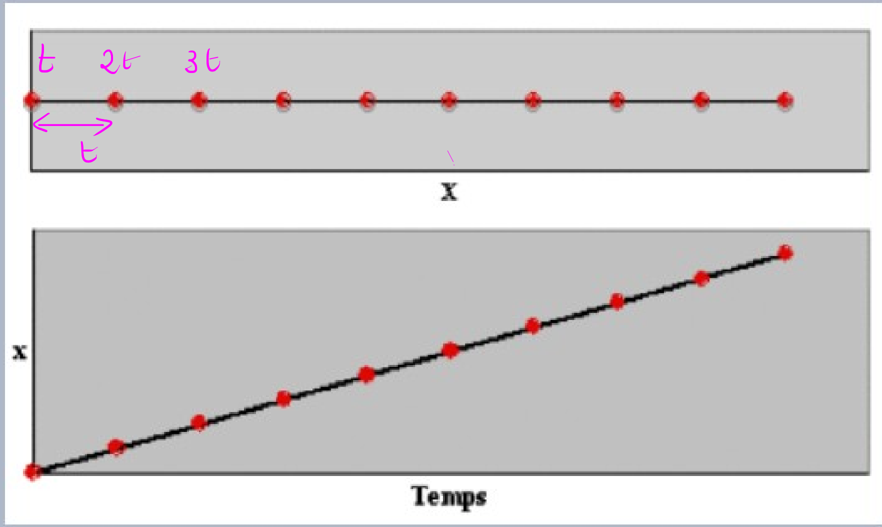
Mouvement dans l'espace : (3D)
3 coordonnées pour le vecteur position et vitesse (voire aussi accélération)

[6]

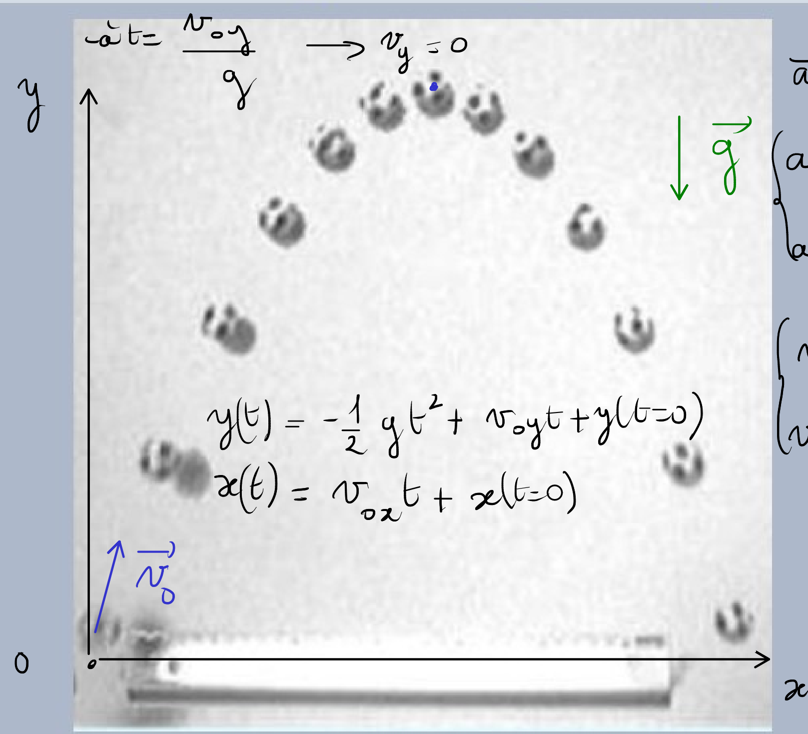
Mouvement rectiligne uniforme : (1D)

- $a_x = 0 = \frac{dv}{dt}$
- $v_x = v$ constante
- $x = v\,t + x(t=0)$

(1D)



Mouvement parabolique :
projectile est soumis à une vitesse initiale et à la seule accélération de la pesanteur.
Voir exercices type bac tir parabolique



$\vec{a} = -g\,\vec{e}_y$

$\begin{cases} a_y = -g \\ a_x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} v_y = -gt + v_{0y} \\ v_x = v_{0x} \end{cases}$

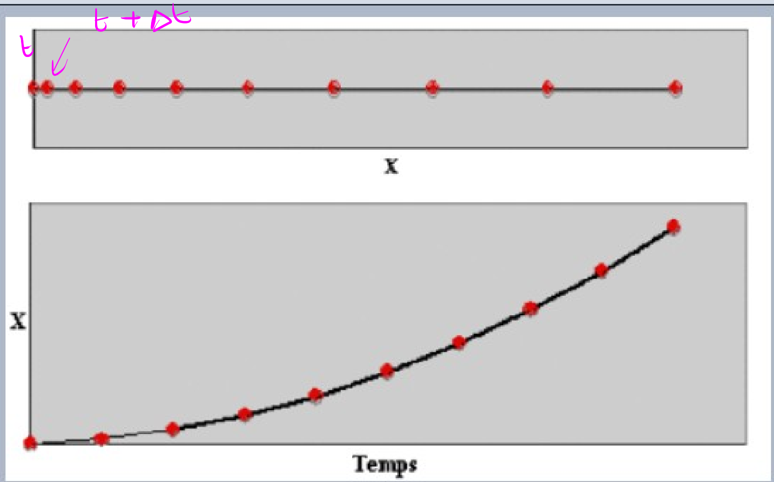
4.3 Les grandeurs cinématiques

Mouvements usuels

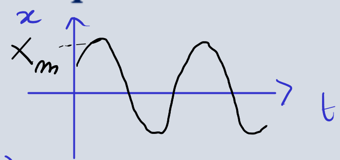
[6]

Mouvement rectiligne uniformément varié :

- $a_x = a = \frac{dv_x}{dt}$ constante
- $v_x = a\,t + v_x(t=0)$
- $x = \frac{1}{2} a t^2 + v_x(t=0)\, t + x(t=0)$
- en substituant le temps on peut obtenir :



Mouvement rectiligne sinusoïdal et équation différentielle :



- $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$
- $v_x = \frac{dx}{dt} = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ — ex : ressort, pendule...
- $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -X_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$
- équation différentielle du 2nd ordre :

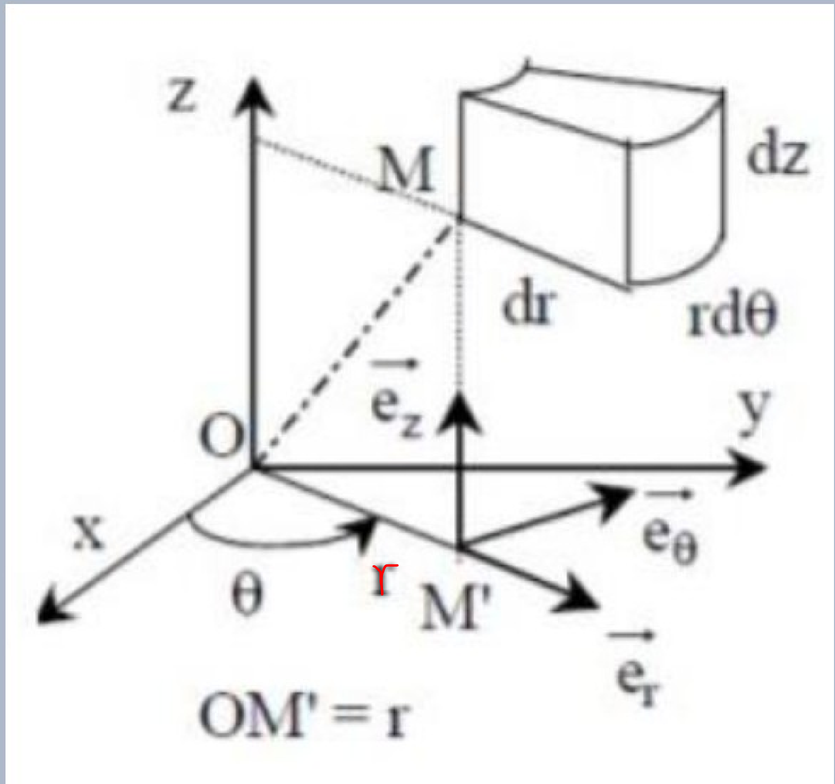
oscillation à la pulsation ω_0

$a_x = \ddot{x} = -\omega_0^2 x$, $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

$[\omega_0] = \frac{1}{T}$, période : $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

4.3 Les grandeurs cinématiques

Système de coordonnées cylindriques



Coordonnées Cylindriques

- (r, θ, z) coordonnées de M
- Vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}}$$

$\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ varient dans le temps

- déplacement élémentaire :

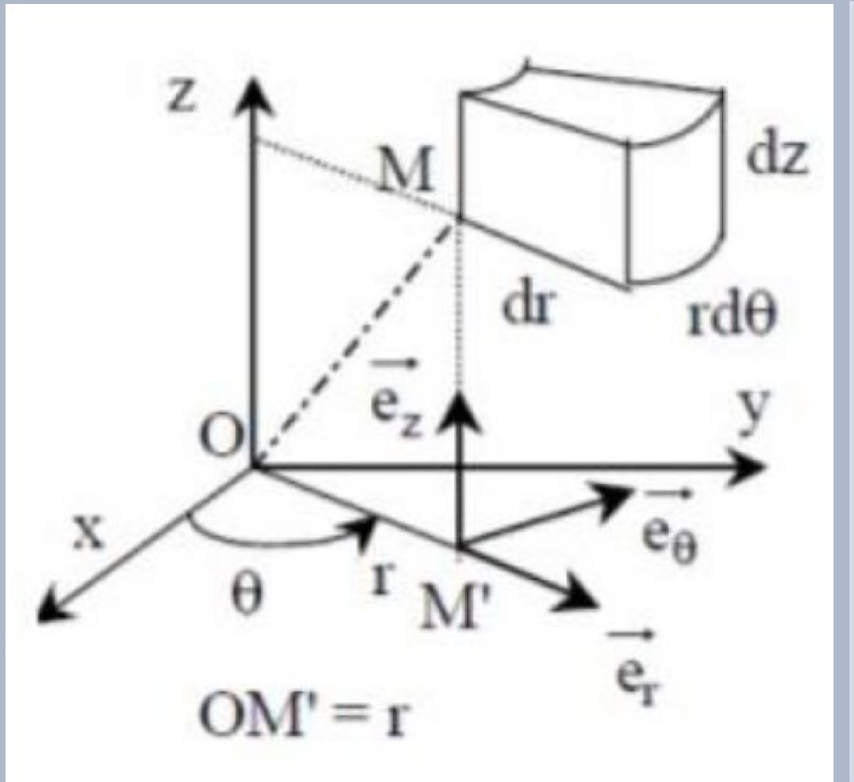
$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{e_r} + r.d\theta.\vec{e_\theta} + dz.\vec{e_z}}$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \vec{e_\theta}$$

$$r \geq 0,\ \theta \in [0; 2\pi]\ \text{et}\ z \in \mathbb{R}$$

4.3 Les grandeurs cinématiques

Système de coordonnées cylindriques



- Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e_r} + z\vec{e_z})}{dt} = \dots$$

Voir démo dans le poly de cours

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}}$$

- Vecteur accélération:

$$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z})}{dt^2} = \dots$$

Voir suite du calcul dans le poly de cours

(2D)

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\,\dot{\overrightarrow{u_r}} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\,\dot{\theta}\,\dot{\overrightarrow{u_\theta}} \\
&= \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\,\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - r\,(\dot{\theta})^2\,\overrightarrow{u_r} \\
&= (\ddot{r} - r\,(\dot{\theta})^2)\,\overrightarrow{u_r} + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\vec{e_z}
\end{aligned}$$

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r$$

(3D)

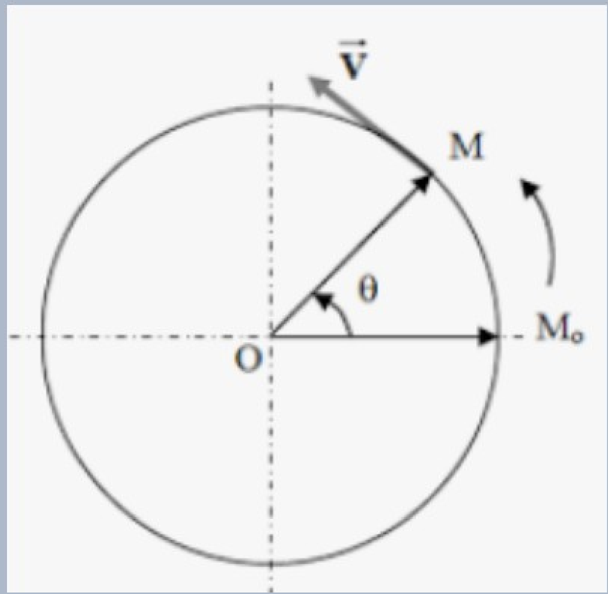
4.3 Les grandeurs cinématiques

Système de coordonnées cylindriques

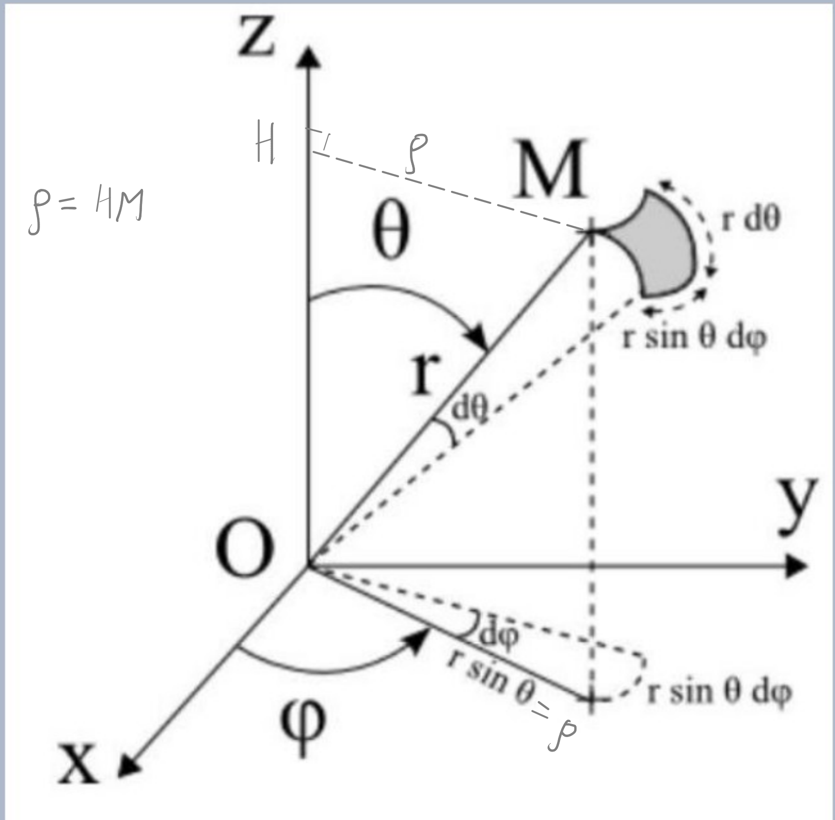
$r = R$ constant $\qquad \dot{r} = \ddot{r} = 0$

Cas particulier du mouvement circulaire (R: rayon du cercle)	
Vitesse	**Accélération**
On montre que : (2D) (3D) $\vec{v}(M) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$ *Voir poly de cours pour la démonstration*	On montre que : $v^2 = R^2\dot{\theta}^2$ (2D) (3D) $\vec{a}(M) = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$ *Voir poly de cours pour la démonstration*

$R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$



Système de coordonnées sphériques



Coordonnées Sphériques

- (r, θ, φ)
- Vecteur position :

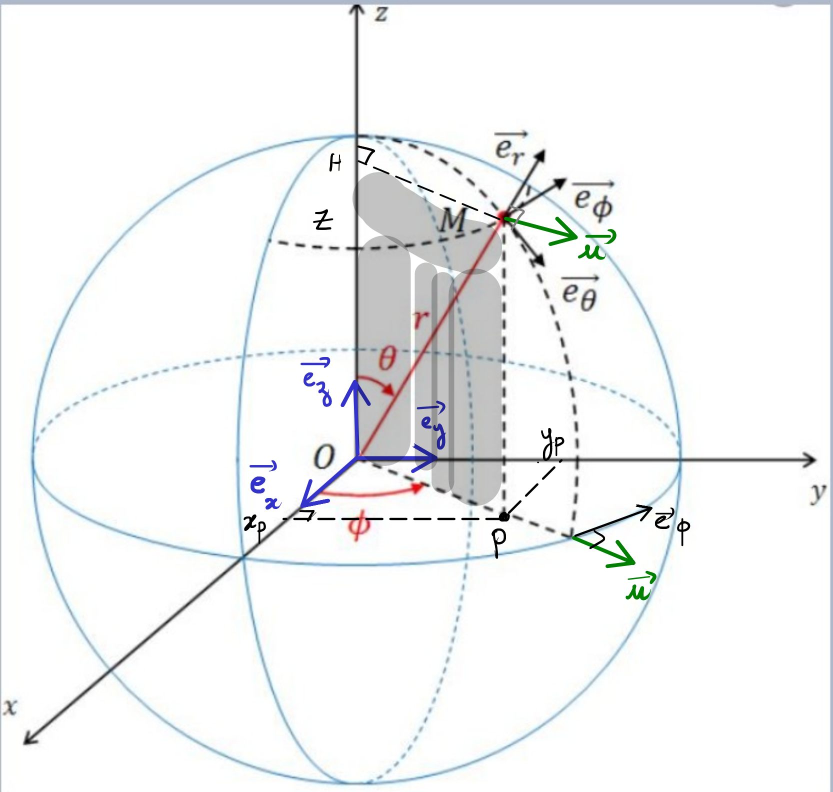
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}}$$

$\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ varient

- déplacement élémentaire :

$$\boxed{\overrightarrow{dOM} = dr.\vec{e_r} + r.d\theta.\vec{e_\theta} + \underbrace{r.sin(\theta)}_{\rho}.d\varphi.\vec{e_\varphi}}$$

Système de coordonnées sphériques



$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|} \quad , \quad \cos\phi = \frac{x_P}{\|\overrightarrow{OP}\|} \qquad \sin\phi = \frac{y_P}{\|\overrightarrow{OP}\|}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{OP}\|}\left(x_P\, \vec{e_x} + y_P\, \vec{e_y}\right) = \cos\phi\, \vec{e_x} + \sin\phi\, \vec{e_y}$$

$\theta + \frac{\pi}{2}$

Exprimer $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$, $z = OH = r\cos\theta$

P projection de M dans le plan (xOy) : $OP = HM = r\sin\theta$

- $\vec{u}$ vecteur unitaire suivant $\overrightarrow{OP}$:

$\vec{u} = \cos\phi\, \vec{e_x} + \sin\phi\, \vec{e_y}$

- $\vec{e_\phi}$ perpendiculaire à $\vec{u}$: $\vec{e_\phi} = \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_x} + \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{e_y}$

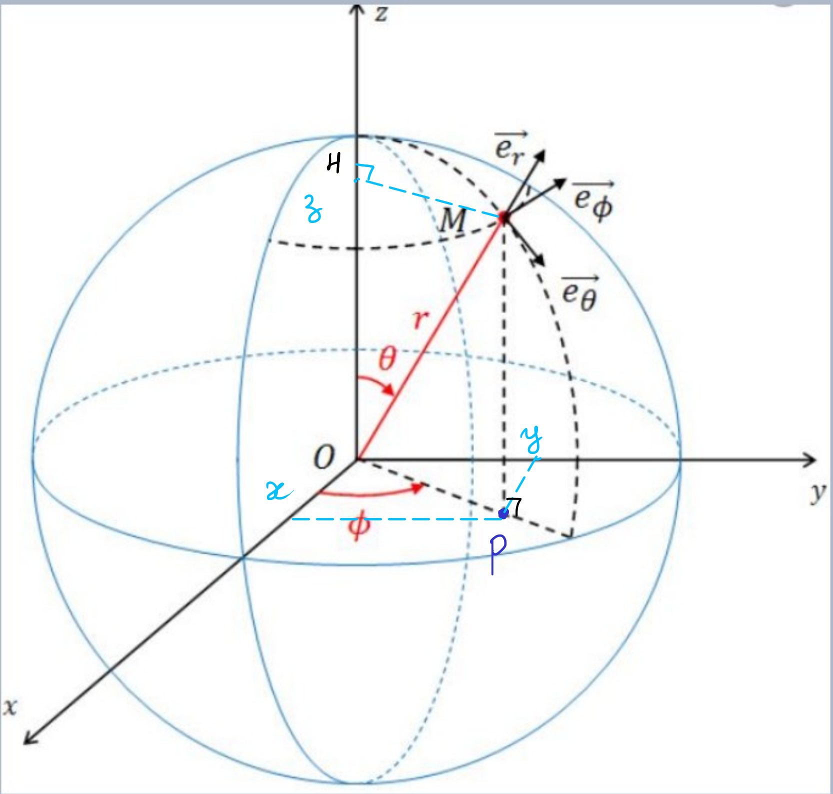
$\vec{e_\phi} = -\sin\phi\, \vec{e_x} + \cos(\phi)\, \vec{e_y}$

- $\vec{e_r} = \sin\theta\, \vec{u} + \cos\theta\, \vec{e_z} = \sin\theta\cos\phi\, \vec{e_x} + \sin\theta\sin\phi\, \vec{e_y} + \cos\theta\, \vec{e_z}$

- $\vec{e_\theta} = \cos\theta\cos\phi\, \vec{e_x} + \cos\theta\sin\phi\, \vec{e_y} - \sin\theta\, \vec{e_z}$

4.3 Les grandeurs cinématiques

Système de coordonnées sphériques



$\cos\phi = \dfrac{x}{OP}$; $\sin\phi = \dfrac{y}{OP}$

Exprimer x, y, z en fontion de r, θ, φ

$OH = \underline{r\cos\theta} = z$

$OP = HM = r\sin\theta$

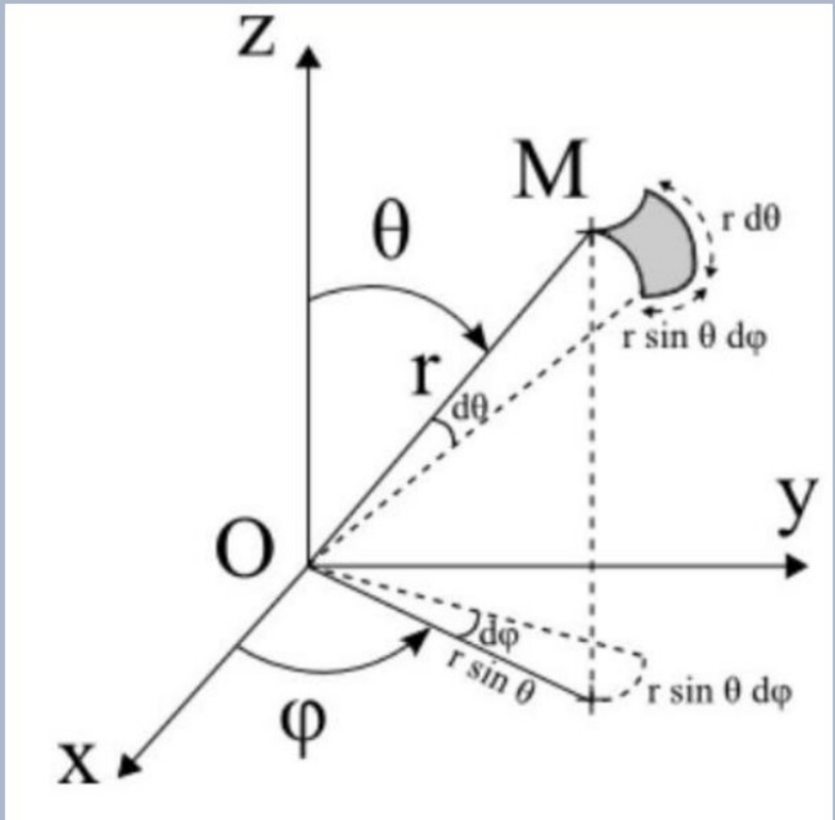
$\underline{x} = OP\cos\phi = \underline{r\sin\theta\cos\phi}$

$\underline{y} = OP\sin\phi = \underline{r\sin\theta\sin\phi}$

$\underline{z} = OH = \underline{r\cos\theta}$

4.3 Les grandeurs cinématiques

Système de coordonnées sphériques



- Vecteur vitesse :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e_r})}{dt} = \ldots$$

Voir démo dans le poly de cours

$$\frac{\overrightarrow{d\ell}}{dt} = \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}}$$

Bibliographie

- [1] Polycopié de cours – Panorama sur la Physique, Chapitre 4, CY Tech
- [2] Maria Barbi - 1P001 Concepts et Methodes de la Physique - groupes MIPI
- [3] Richard Laffont - Cours de mécanique du point, EISTI.
- [4] David Sénéchal - *Mécanique I - D. Senechal -PHQ114*
- [5] Claude Pasquier - *Mécanique*
- [6] Présentation de Lucie Desplat (campus de Pau).
- [7] Khan Academy , Unisciel etc…