TD 2 - Suites numériques

Généralités :

Exercice 1. *Donner un exemple de suite :*

1. *Croissante et majorée.*
2. *Ni croissante, ni décroissante.*
3. *Ni majorée, ni minorée.*

Exercice 2. *Écrire à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :*

1. *La suite (u_n) est positive à partir d'un certain rang.*
2. *La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.*
3. *La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.*

Définition de la limite, opérations, techniques classiques :

Exercice 3. *Déterminer les limites des suites ci-après en revenant à la définition (avec les quantificateurs) :*

a) $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ *b)* $v_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$ *c)* $w_n = -3 \times 2^{n+1}$

Exercice 4. *Déterminer si elles existent les limites des suites définies par :*

a) $\dfrac{10^{92}n^2}{n+n^3}$ *b)* $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ *c)* $\dfrac{\sqrt{n}\sin n}{n+\sqrt{n}}$ *d)* $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$ *e)* $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}$

f) $\dfrac{(-1)^n+n}{n+7\sqrt{n}}$ *g)* $\dfrac{(-3)^n+7^n}{2^n+5^n}$ *h)* $\dfrac{n^2+\cos n}{\sin(n)-3n^2}$ *i)* $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dots\dfrac{n}{n^2}$

A faire chez soi

j) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ *k)* $\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ *l)* $\dfrac{2^n-3^{n+1}}{5^{2n}}$ *m)* $\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+n+1}$

Exercice 5. *Étudier les suites de terme général :*

1. $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ *, avec* $a, b > 0$
2. $u_n = 1 + a + a^2 + ... + a^n$ *, avec* $a > 0$

Exercice 6. *Déterminer si elles existent les limites des suites définies par :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $x\in\mathbb{R}$

   Indication : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right)$

A faire chez soi

a) $n^{\frac{1}{n}}$ *b)* $\ln\left(\dfrac{1+n}{n^2}\right)$

Exercice 7. *Déterminer si elles existent les limites des suites définies par :*

a) ne^{-n} *b)* $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ *c)* $\dfrac{E(nx)}{n}$ *d)* $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cos\left(e^n\right)$ *e)* $\dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 8. *Soit x un réel.*

1. *Déterminer la limite de* $u_n=2\left(\dfrac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2}\right)$
2. *En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$*

Propriétés de la limite, suites extraites et suites adjacentes :

Exercice 9. *Démontrer la propriété si elle est vraie, donner un contre exemple sinon.*

1. *Si* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.
2. *Une suite non majorée tend vers* $+\infty$.
3. *Si la suite* (u_n) *converge vers l, alors* $\forall p\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+p}-u_n=0$.
4. *Si les suites* (x_n) *et* (y_n) *divergent alors la suite* (x_n+y_n) *diverge.*
5. *Si les suites* (x_n) *et* (y_n) *divergent alors la suite* (x_ny_n) *diverge.*
6. *Pour toute suite de réels* (y_n), *si* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ *alors* $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.
7. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$ *alors soit* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ *soit* $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. *(Indication : considérer l'exemple* $x_n=(1+(-1)^n)/2,\quad y_n=(1-(-1)^n)/2$ *).*
8. *Si* (u_n) *est convergente et les u_n sont strictement positifs, alors la limite de* (u_n) *est strictement positive.*
9. *Si* (u_n) *est une suite croissante et* $u_n\leq 7$ *alors* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=7$.

A faire chez soi

Exercice 10. *Soient* (u_n) *une suite convergente, ℓ sa limite, a un réel, si $a<\ell$ montrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\Longrightarrow u_n>a$$

Exercice 11. *Démontrer la propriété si elle est vrai, donner un contre exemple sinon.*

1. *Toute suite d'entiers convergente est stationnaire à partir d'un certain rang.*
2. *Toute suite à termes positifs qui converge vers* 0 *est décroissante.*
3. *Si la suite* $(|u_n|)$ *converge alors* (u_n) *converge. Formuler et étudier sa réciproque.*
4. *Si pour tout* $p \in \mathbb{N}$, u_{2p} *est positif et* u_{2p+1} *est négatif, alors la suite* (u_n) *diverge.*
5. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$ *alors la suite* (u_n) *converge.*
6. *Si* (u_n) *est croissante, alors* (u_n) *tends vers* $+\infty$.
7. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$ *alors la suite* (u_n) *est positive à partir d'un certain rang.*
8. *Toute suite monotone est convergente.*
9. *Toute suite croissante et majorée est bornée.*
10. *Si la suite* (u_n) *est décroissante et* $\forall n$ $u_n \geq 0$, *alors* (u_n) *tends vers* 0 *quand* n *tends vers* $+\infty$.

Exercice 12. *Justifier rigoureusement la divergence des suites suivantes :*

1. $a_n = n\sin(\frac{n\pi}{2})$.
2. $b_n = \dfrac{(-1)^n n^3 + 3n^2 + 5}{2 - 5n^3}$.
3. $c_n = (-1)^n \dfrac{n}{1+n} \cos\left(\frac{n\pi}{7}\right)$

Exercice 13. *On suppose que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite telle que* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent. Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Exercice 14. *On définit les deux suites :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}, \ \textit{et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Exercice 15. *Soit* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. *Montrer que* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont adjacentes. En déduire que* u_n *converge.*

Exercice 16. *On considère les deux suites réelles définies par*

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $w_n = v_n - u_n$. *Calculer* w_n *en fonction de* n *et montrer que la suite* (w_n) *converge. Quelle est sa limite ?*
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ *et* $v_n \geq 0$, *puis montrer que* (u_n) *est croissante,* (v_n) *est décroissante et que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
3. *En déduire que les suites* (u_n) *et* (v_n) *convergent et qu'elles ont la même limite.*
4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on pose* $t_n = 3u_n + 8v_n$. *calculer* t_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *En déduire que* (t_n) *converge vers une limite que l'on précisera.*
5. *Déduire la limite commune de* (u_n) *et* (v_n).

Pour aller plus loin

Exercice 17. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de réels strictement positifs. On suppose que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ *avec* $\ell \in [0, +\infty]$.

1. *Montrer que, si* $\ell < 1$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. *Montrer que, si* $\ell > 1$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. *Peut-on conclure si* $\ell = 1$ *?*
4. *Appliquer ces résultats aux exemples suivants :*
   (a) $u_n = \frac{a^n}{n!}$, *avec* $a \in \mathbb{R}_+^*$
   (b) $v_n = \frac{n^n}{n!}$
   (c) $w_n = \frac{a^n}{n^p}$ *avec* $a \in]1, +\infty[$ *et* $p \in \mathbb{N}$.
   (d) $\sqrt[n]{a}, \quad a \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 (***Théorème de Cesàro***)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite réelle.* $\forall n \in \mathbb{N}^*$*, on pose*

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(v_n *est la moyenne arithmétique des* n *premiers termes de la suite* u*).*

1. *On suppose* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *avec* $l \in \mathbb{R}$*. Montrer qu'alors on a aussi* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ *. Étudier la réciproque.*
2. *Que peut-on dire si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *?*

Exercice 19 (***Constante d'Euler***)**.** *Soit :*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

1. *Montrer que pour tout* $n \in N^*$*, on a :*
$$\frac{1}{n+1} \leq ln(n+1) - ln(n) \leq \frac{1}{n}$$
2. *En déduire que :*
$$ln(n+1) \leq H_n \leq ln(n) + 1$$
3. *En déduire la limite de* H_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$
4. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n>0}$ *définie par :*
$$u_n = H_n - ln(n)$$
est décroissante et positive.
5. *Conclure (La limite de* (u_n) *souvent notée* γ *est appelée la constante d'Euler, du nom du mathématicien Suisse Leonhard Euler, 1707-1783, surnommé le "prince des mathématiciens". Cette limite vaut environ 0.5772156649... mais on ne sait toujours pas si ce réel est rationnel ou irrationnel. La question est toujours ouverte !)*

Suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$ **:**

Exercice 20. *Étudier la suite* (u_n) *définie par :*

1. $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ *avec* $u_0 = 0$*, puis avec* $u_0 = 2$*. On se placera dans* $I = [0; +\infty[$.
2. $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + 1$ *avec* $u_0 = 1$*, puis avec* $u_0 = 2$*. On se placera dans* $I =]0; +\infty[$.

Exercice 21. *On considère la suite définie par :* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = 3 - \sqrt{\dfrac{u_n}{2}}$.

On pose $f(x) = 3 - \sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0; 3]$.
2. *Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de* f *dans cet intervalle.*
3. *Montrer que la suite* $(u_{2n})_n$ *est croissante et la suite* $(u_{2n+1})_n$ *décroissante.*
4. *On admet que* $f \circ f$ *possède les mêmes points fixes que* f *dans l'intervalle* $[0; 3]$*. Montrer que les deux suites extraites convergent vers la même limite et conclure.*

A faire chez soi

Exercice 22. *On considère la fonction* $f :]0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$ *définie par*

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

et la suite récurrente $(u_n)_{n \geq 0}$ *vérifiant* $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_0 = 1$.

1. *Montrez que l'intervalle* $[1, 3]$ *est stable par* f*. Que peut-on en déduire sur* u_n *? Quel est le sens de variation de* f *sur* $[1, 3]$ *?*

   Soient v_n *et* w_n *les suites définies par* $v_n = u_{2n}$ *et* $w_n = u_{2n+1}$.
2. *Montrez que* $(v_n)_{n \geq 0}$ *est croissante et que* $(w_n)_{n \geq 0}$ *est décroissante.*
3. *En déduire que* $(v_n)_{n \geq 0}$ *et* $(w_n)_{n \geq 0}$ *sont convergentes. Déterminez leur limite respective.*
4. *Finalement, quelle est la nature de la suite* $(u_n)_{n \geq 0}$ *?*

Exercice 23. *Étudier les suites* (u_n) *à termes réels vérifiant*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \left(u_n^2 - 3u_n + 4\right) \text{ pour tout } n \geq 0$$

On pourra étudier les variation de la fonction f *définissant cette suite, déterminer ses points fixes, étudier le signe de* $f(x) - x$ *puis distinguer plusieurs cas selon la valeur de* u_0.

Suites complexes :

Exercice 24. *Étudier les suites suivantes :*

1. $z_n = \dfrac{n^2 i^n}{n^3 + 1}$
2. $z_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n i$
3. $z_n = \dfrac{n}{n + 3i} - \dfrac{ni}{n + 1}$

4. $z_n = \dfrac{n^2 i - in + 1 - 3i}{(2n + 4i - 3)(n - i)}$

Exercice 25. *Étudier la suite définie par la donnée de* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et la relation de récurrence :* $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2z_n - \overline{z_n})$

Exercice 26. *Soient* $(x_n)_{n\geq 0}$ *et* $(y_n)_{n\geq 0}$ *deux suites réelles telles que :* $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2} \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$

On introduit la suite complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$.

1. *Etablir une relation de récurrence entre* z_n *et* z_{n+1}.
2. *En déduire que les deux suites réelles sont convergentes et donner leur limite.*

A faire chez soi

Exercice 27. *Soit* $z_n = a^n$ *une suite complexe de raison* $a \in \mathbb{C}$.

1. *Étudier cette suite dans le cas* $|a| < 1$, *puis dans le cas* $|a| > 1$.
2. *Dans le cas* $|a| = 1$, *on notera* $a = e^{i\theta}$. *Que se passe-t-il si* $\dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ *?*
3. *Montre que si* $\dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, *la suite est périodique et donc divergente. Dans les autres cas, c-à-d lorsque* $\dfrac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, *on montre que la suite est également divergente.*