

---

## Nombres Réels

---

**Exercice 1.** Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?

$$a = 1/3, \quad b = 1/15, \quad c = 1/25, \quad d = 1/125, \quad e = 0.333\dots, \quad f = \sqrt{2}, \quad g = 0.123456789123\dots$$

**Exercice 2.** Trouver sous la forme  $\frac{p}{q}$  des rationnels  $x$  dont les développements décimaux périodiques sont donnés par :

$$3.14\hat{1}4\dots; \quad 3.149\hat{9}\dots$$

---

**A faire chez soi**

$$0.999\dots$$

---

**Exercice 3.** Montrer que  $\frac{\ln 3}{\ln 2}$  est irrationnel.

---

**Pour aller plus loin**

**Exercice 4.**

1. Démontrer que si  $r \in \mathbb{Q}$  et  $x \notin \mathbb{Q}$  alors  $r + x \notin \mathbb{Q}$  et si  $r \neq 0$  alors  $r.x \notin \mathbb{Q}$ .
  2. Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .
  3. En déduire: entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.
- 

**Exercice 5.** Étant donné un ensemble  $A \subset \mathbb{R}$ , écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes:

1. 10 est un majorant de  $A$ ;
2.  $m$  est un minorant de  $A$ ;
3.  $P$  n'est pas un majorant de  $A$ ;
4.  $A$  est majoré;
5.  $A$  n'est pas minoré;

6.  $A$  est borné;
7.  $A$  n'est pas borné.

**Exercice 6.** Soit

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R}^* : -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

1. Montrer que  $I$  est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'il existent): les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de  $I$ .

**Exercice 7.** Les ensembles suivants sont-ils majorés ? Minorés ? Si oui, déterminer leur borne inférieure et leur borne supérieure. Ont-ils un plus petit élément ? Un plus grand élément ?

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

$$B = \left\{ 1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{p} : n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^* \right\}$$

**Exercice 8.**

1. Montrer que,  $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

2. En déduire que

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

admet une borne supérieure et inférieure que l'on déterminera.

**Exercice 9.** Soit  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$  telles que pour tout  $x$  de  $A$  et tout  $y$  de  $B$  on ait

$$x \leq y.$$

Démontrer que  $\sup(A)$  et  $\inf(B)$  existent et que  $\sup(A) \leq \inf(B)$ .

**Exercice 10.**

1. Soit  $A$  une partie non vide et bornée de  $\mathbb{R}$ . On pose

$$-A = \{-x : x \in A\}.$$

Montrer que  $-A$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}$  et que  $\sup(-A) = -\inf(A)$ .

2. Soient  $A, B$  deux parties non vides bornées de  $\mathbb{R}$ . On pose

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

Montrer que  $A + B$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}$  et que  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ ,  $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$ .

**Exercice 11.** Soit  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$ . Démontrer les implications suivantes:

1.  $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$ ,
  2.  $A \subset B \Rightarrow \inf(B) \leq \inf(A)$ ,
  3.  $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$ ,
  4.  $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf(A), \inf(B))$ .
- 

### A faire chez soi

**Exercice 12.** On considère l'ensemble des nombres de la forme  $\frac{1}{n}$ , où  $n$  décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble est-il majoré ? Minoré ? A-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifier vos réponses.

**Exercice 13.** Soit  $A$  une partie non vide et bornée de  $\mathbb{R}$ . On note

$$B = \{|x - y|, (x, y) \in A^2\}.$$

1. Justifier que  $B$  est majoré.
2. Prouver que

$$\sup(B) = \sup(A) - \inf(A).$$

**Exercice 14.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides bornées de  $\mathbb{R}$ . On pose

$$A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}.$$

A-t-on toujours  $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ ? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?

**Exercice 15.** Soit  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$ . Démontrer les implications suivantes:

1.  $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$ ,
  2.  $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$ ,
- 

**Exercice 16.** Montrer que la fonction partie entière est croissante.

**Exercice 17.** On note  $E(x)$  la partie entière d'un nombre réel  $x$ .

1. Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

2. Calculer  $E(x) + E(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $E(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$ .

---

## A faire chez soi

**Exercice 18.** Soient  $n$  un entier naturel et  $x$  un réel positif.

1. Combien  $y$  a-t-il d'entiers naturels entre 1 et  $n$ ? entre 1 et  $x$ ?
2. Combien  $y$  a-t-il d'entiers naturels entre 0 et  $n$ ? entre 0 et  $x$ ?
3. Combien  $y$  a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et  $x$ ? Combien  $y$  a-t-il d'entiers naturels impairs entre 0 et  $x$  ?
4. Combien  $y$  a-t-il de multiples de 3 entre 0 et  $x$ ?
5. Combien l'équation  $x + 2y = n$ ,  $n$  entier naturel donné et  $x$  et  $y$  entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?
6. De combien de façons peut-on payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros ?

**Exercice 19.** Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , les équations suivantes:

1.  $(5E(x) + 2) \cdot (3E(x) + 6) = 0$ .
2.  $(2E(x) + 1)^2 < 4$ .

---

## Pour aller plus loin

**Exercice 20.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).$$

**Exercice 21 (Inégalité de Cauchy-Schwartz).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Indication: considérer le polynôme  $f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k x)^2$ .