LES SOMMES

ANALYSE (1)

le symbole Σ

pour
$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$
$\Downarrow$
$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$
$\Downarrow$
somme pour i variant de m à n des a_i.

le symbole Π

- pour
$a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n$
$\Downarrow$
$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n$
- $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

$\Delta\ 0! = 1$

$\Downarrow$
$n! = n(n-1)! \to$ si $n \geq 1$.

RELATION DE CHASLES

soit m, n et p 3 entiers naturels et $m \leq p \leq n$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \left(\prod_{k=m}^{p} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=p+1}^{n} a_k\right)$$

LINÉARITÉ DE LA SOMME

soit m et n 2 entiers naturels avec $m \leq n$ et $\{a_m ; \dots ; a_n\} ; \{b_m ; \dots ; b_n\}$ deux familles de réels.

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=m}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=m}^{n} a_i \Rightarrow \sum_{i=m}^{n} (\lambda a_i + \beta b_i)$$
$$= \lambda \sum_{i=m}^{n} a_i + \beta \sum_{i=m}^{n} b_i$$

MULTIPLICATIVITÉ

$$\prod_{i=m}^{n} (a_i b_i) = \prod_{i=m}^{n} a_i \prod_{i=m}^{n} b_i$$

PASSAGE À LA PUISSANCE

$$\prod_{i=m}^{n} a_i^p = \left(\prod_{i=m}^{n} a_i\right)^p, \quad p \in \mathbb{N}$$

CONSTANTE $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda \cdot a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k$$

SIMPLIFICATION TÉLESCOPIQUE

des termes s'annulent dans la somme (c'est dernier terme)

$\boxed{\text{somme télescopique} = \sum_{i=m}^{n} (a_{i+1} - a_i)}$

$= a_{m+1} - a_m$
$+ a_{m+2} - a_{m+1}$
$\vdots$
$+ a_n - a_{n-1}$
$+ a_{n+1} - a_n$
$= a_{n+1} - a_m$

simplification télescopique
$\forall a_m \dots a_{n+1} \in \mathbb{R}$ avec $m \leq n$, on a
$$\sum_{i=m}^{n} a_{i+1} - a_i = \boxed{a_{n+1} - a_m}$$

produit télescopique =
$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\cancel{a_1}}{a_0} \times \frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_1}} \times \dots \times \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}}$$
$$= \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

simplification télescopique
$\forall a_m \dots a_{n+1} \in \mathbb{R}^*$ avec $m \leq n$,
$$\prod_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \boxed{\frac{a_{n+1}}{a_m}}$$

SOMMES USUELLES

somme de constantes
$a \in \mathbb{R}$, $m \leq n$ 2 entiers
$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)a = \text{nb termes} \times a}$$

sommes arithmétiques
$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

sommes géométriques
$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} q^i = q^m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$