CHAPITRE 1

ANALYSE

3

① MAJORANT ET MINORANT

- majoration = $x \leq M$
- minoration = $x \geq m$
- bornée = $m \leq x \leq M$

par

- maximum = majorant de A qui est dans A
- minimum = minorant de A qui est dans A
- théorème : M et $M' \in \mathbb{R}$. si deux + grands éléments de A, on a $M' \leq M$
  → M majore A et $M' \in A$, donc $M \leq M'$ car M' majore A.
  → $M' \leq M$ et $M \leq M'$ ⇒ $M = M'$ → le maximum est UNIQUE.

BORNE SUPÉRIEURE / INFÉRIEURE

- sup(A) = + petit maj
- inf(A) = + grand min

démonstration diapo 31

⚠ borne sup pas forcément dans l'ensemble : ex $[a,b[$

théorème
Si A possède un + grand élément, alors A possède une borne supérieure
sup(A) = max(A)
inf(A) = min(A)

proposition
- A admet un + grand élément ⇔ $\sup(A) \in A$
- A admet un + grand élément ⇔ $\inf(A) \in A$

propriétés
- $m = \sup(A)$
  m majorant de A.
  $\forall M'$ maj. A, $M \leq M'$
  $\forall b < M$, b majore ∅ A
  $\forall y < M$, $\exists x \in A$ tq $y < x$
  $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tq $M - \varepsilon < x$

	min(A)	inf(A)	max(A)	sup(A)
$A = \{1\}$	1	1	1	1
$A = \{2;4\}$	2	2	4	4
$A = [-5;0[$	-5	-5	X	0
$A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$	X	0	1	1

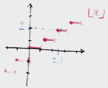
car lim

OPÉRATION SUR BORNES SUPÉRIEURES
- Si $A \subset B$, $\boxed{\sup(A) \leq \sup(B)}$
- $A \cup B$ borne sup : $\boxed{\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}}$
- $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ borne sup et : $\boxed{\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)}$
- $\forall \lambda > 0$, l'ens $\lambda . A = \{\lambda a : a \in A\}$ a une borne sup $\boxed{\sup(\lambda . A) = \lambda . \sup(A)}$

② PROPRIÉTÉ D'ARCHIMÈDE

unicité de n :
n_1 et n_2 tq : $n_1 \leq x < n_1 + 1$
$n_2 \leq x < n_2 + 1$
alors $-n_2 - 1 < -x \leq -n_2$ et par somme
$n_1 - n_2 - 1 < 0 < n_1 - n_2 + 1$
⇔ $-1 < n_1 - n_2 < 1$ par conséquent...
donc $n_1 - n_2 = 0$ ⇔ $n_1 = n_2$

partie entière
$x \in \mathbb{R}$, unique entier
n vérifiant $n \leq x < n+1$
= partie entière de x
= $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$
= $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$
= $x - 1 < E(x) \leq x < E(x) + 1$



③ densité

$\boxed{\text{A dense}}$ = $x < y$, $\exists a \in \mathbb{R}$ tq $x < a < y$.
= intervalle contient un élément de A.

- caractérisation de la densité en termes de voisinages
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in U$, $\boxed{|u - x| < \varepsilon}$
→ approché aussi près qu'on peut

- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ denses dans $\mathbb{R}$.
- approximations décimales :
$P_n = [10^n x]$ unique entier, tq
$\boxed{P_n \leq 10^n x < P_n + 1 \Rightarrow \frac{P_n}{10^n} \leq x < \frac{P_n + 1}{10^n}}$

approximation décimale par ~~défaut~~ excès

→ approximation décimale par défaut de x à la précision 10^{-n}

MÉTHODES

- passer de b à sup(B).
"chaque élément b de B est majoré par
sup(A+B) - sup(A) donc :
$b \leq \sup(A+B) - \sup(A)$
⇒ $\sup(B) \leq \sup(A+B) - \sup(A)$
⊕ sup(B) + petit des majorants

décimal fini = 0,56
décimal infini = π
décimal périodique = $0,\overline{3}$